

Gottlob Frege



SCRIVERI
LOGICO-
FILOSOFICE
I

GOTTLOB
FREGE

LOGISCH-
PHILOSOPHISCHE
SCHRIFTEN

STUDIU INTRODUCTIV

S-a spus despre Frege că ar fi noul Aristotel al logicii moderne. Comparația aparține și se adresează logicienilor; Frege, într-adevăr, a adus contribuția decisivă la conturarea profilului actual al logicii simbolice. Logica propozițiilor și logica predicatelor, interpretarea semantică, punerea logicii în conexiune cu fundamentele matematicii, logicismul — toate sînt opera, ctitoria profesorului de la Universitatea din Jena. Puțin cunoscut de către contemporanii săi, Frege a fost redescoperit „în etape”; astăzi, statutul său de clasic al logicii nu mai suscită dubii.

Iată însă că prestigiul creației fregeene începe să debordeze cadrul limitat al unei discipline particulare pentru a se extinde în sfera filosofiei, unde aduce o spectaculoasă răsturnare de valori. Dintr-un obscur discipol al lui Hermann Lotze — care încercase o îmbinare a direcției neokantiene cu cea platonice — Frege ne apare astăzi într-o lumină cu totul nouă, ca unul dintre cei mai semnificativi și mai originali filosofi ai ultimului veac, ca purtătorul unui mesaj filosofic, deloc ermetic, mesaj cu consecințe îndepărtate și stîrnind un interes tot mai diversificat. Din arhivele de curiozități minore ale cugetării filosofice, obscurul Frege a trecut în ultimul sfert de veac în acea istorie *vie* a filosofiei în care se consumă fără a se spulbera întrebările fundamentale ale spiritului uman. La apariția ei, *Istoria filosofiei occidentale* a lui Russell a putut izbi nu numai prin cîteva aprecieri exclusiviste și nedrepte, dar și prin faptul că îi făcea un loc lui Frege într-o istorie care nu era decît incidental a logicii. Astăzi ne-am putea declara nesatisfăcuți mai curînd de faptul că Russell are o viziune parțială asupra contribuției lui Frege într-o istorie a filosofiei care nu se lasă absorbită în istoria constituirii filosofiei analitice. Dacă ar fi să spunem că metoda analitică în filosofie nu este monopolul așa-numitei filosofii analitice, și încă ar fi destul pentru a desprinde opera lui Frege de la remorca unei filosofii atît de puțin comprehensive cum este cea analitică. Dar se mai adaugă la aceasta împrejurarea că Frege i-a putut influ-

ența durabil nu numai pe Russell, Wittgenstein, Carnap, ei înșiși figuri proeminente ale filosofiei secolului XX, ci și pe Husserl care mergea într-o direcție opusă, aruncând o sondă filosofică în profunzimile subiectivității umane. Iar astăzi Frege ne apare drept unul din acei gânditori ale cărui surse trebuie căutate la filosofi de talia unui Leibniz sau Kant și ale cărui adrese nu s-au epuizat. De la întrebări fundamentale pornește Frege, pentru a răspunde într-o manieră care permite scoaterea unor consecințe fructuoase, mai generale, din examinarea unor probleme exacte în spatele cărora se profilează teme fundamentale, spre exemplu natura judecăților matematice, locul logicii în edificiul cunoașterii umane, raportul dintre expresie și conținut de gândire, dintre concept, reprezentare și obiect.

Frege a intrat în istoria filosofiei nu în calitate de creator al vreunui sistem filosofic. Epoca sistemelor filosofice era revolută și, pe de altă parte, Frege era și vroia să fie matematician. Inseși căutările sale logice au o unică motivație: fundarea aritmeticii pe o bază logicistă, ca un corp deductiv de propoziții *ex ratione*, non-factuale, apriorice, logic-necesare. Rezultatele extraordinare la care a ajuns în logică trebuiau ele însele fondate teoretic, nu mai puțin decît întregul program logicist; așa se face că, pornind din sfera matematicii, Frege a ajuns la filosofia matematicii, la filosofia logicii și la filosofia limbajului. Aceste trei direcții de preocupări fuzionează într-un complex de idei bine încheiat, în așa fel încît linii de netrecut între ele nu există. Opera lui Frege nu reprezintă un tratat universitar cu despărțăminte rigide, ci o creație vie, în care fundamentele logicii, matematicii și limbajului se conectează într-un corp unitar, se implică reciproc și își demonstrează o relevanță epistemologică generală.

Dacă nu găsim — și nu este cazul să căutăm — în opera lui Frege un răspuns la marile probleme fundamentale ale existenței umane, la raportul dintre om și lume, în schimb problemele de importanță majoră pentru cunoașterea logică și matematică au fost analizate cu o pătrundere inegalată. Frege a dovedit în *actu* că analiza logică, „microscopul logic” constituie o metodă într-adevăr fecundă și înnoitoare în cercetarea minuțioasă a unor zone ale epistemologiei. Probleme ca raportul dintre logică și ma-

tematică, aspectele analitice ale cunoașterii matematice, raportul dintre elementul formal și conținutul cunoașterii, dintre limbă și gândire, dintre limba obișnuită și limbajul artificial, alături de multe altele, au fost investigate de către Frege într-o manieră care a prefigurat, a statornicit cadrul în care aveau să se desfășoare dezbaterile epistemologice ale secolului nostru. Logica a avut întotdeauna o însemnătate formativă și filosofică generală; în mod eronat, unii au putut crede că ascensiunea logicii matematice este o tristă specializare alexandrină a unei discipline care și-a epuizat valențele ei general-filosofice. Nu există dezmințire mai elocventă a unei asemenea aparențe decât ceea ce a creat Frege.

Opera sa aparține filosofiei universale în aceeași măsură și cu același drept cu care *Categoriile* și *Analiticile* lui Aristotel aparțin mării tradiții a gândului teoretic.



Viața lui Frege este săracă în evenimente exterioare, însă biografia operei îi conferă un puternic dramatism subteran.

Gottlob Frege s-a născut la Wismar la 8 noiembrie 1848 și a murit la Bad Kleinen la 26 iulie 1925. Din 1876 a predat la Universitatea din Jena, pînă la pensionarea sa (în 1918) cu gradul de „profesor extraordinar“; trecerea sa din viață a trecut aproape neobservată, iar de popularitatea lui Couturat, Russell sau Hilbert nu s-a bucurat niciodată în lungul drum al vieții sale.

Prima lucrare importantă a lui Frege este cartea *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* („Scriere conceptuală; un limbaj formalizat al gândirii pure, modelat după limba aritmeticii“), care apare la Halle în 1879. Chiar dacă G. Frege nu ar mai fi creat nimic după aceea, prin cartea lui ar fi înscris în orice caz un capitol înnoitor în istoria logicii. *Begriffsschrift* marchează intrarea logicii matematice într-o nouă etapă de evoluție, prin părăsirea fâgașului „algebrei logicii“ deschis de Boole. *Begriffsschrift* este importantă pentru logica propozițiilor, logica predicatelor, teoria relațiilor și fundațiile aritmeticii. Logica propozițiilor fusese elaborată în antichitate de către stoici, preluată sau redescoperită de către lo-

gicienii medievali și, în cele din urmă, George Boole o regăsisese ca pe o posibilă interpretare secundă a algebrei logicii (concepută în primul rînd ca algebră a claselor). Frege redescoperă logica propozițiilor¹ și o dezvoltă în mod riguros, pe o cale proprie, introducînd un simbolism izvorît dintr-o altă perspectivă teoretică. Începînd de la *Begriffsschrift*, logica propozițiilor își capătă caracterul ei fundamental, de teorie de început a logicii, teorie presupusă și înglobată în alte teorii mai complexe.

Mai importantă încă este crearea acelei teorii care se numește astăzi „logica predicatelor”, „logica funcțională” sau, în sfîrșit, „teoria cuantificării”. Frege este părintele acestei logici cu totul noi; spre deosebire de logica propozițiilor, a cărei extindere este, logica predicatelor nu poate fi interpretată ca algebră booleană. Aici, Frege inovează la modul absolut, importanța teoriei sale fiind cu totul covârșitoare: logica formală capătă astfel forță de propulsie, devine aptă să formalizeze structura mai fină a raționamentelor în care intervin propoziții existențiale și generale, se dovedește în măsură de a unifica înăuntrul unei singure teorii, în lumina acelorași concepte fundamentale, analiza propozițiilor de predicăție și de relație. Logica se poate aplica — pentru prima oară — la studiul matematicii. Stăpînirea judecăților de relație, în adevăr, este condiția *sine qua non* a aplicației logicii la fundamente.

Descoperirile lui Frege — cum spuneam — descind dintr-o perspectivă teoretică nouă. Frege este logicist: consideră că toate ideile matematicii (în particular, ideile aritmeticii și analizei) trebuie definite exclusiv prin idei logice și că adevărurile matematicii derivă toate din adevăruri logice. Oricum am aprecia această concepție-program (despre ea va fi vorba mai jos) nu se poate tăgădui rolul ei stimulator, determinant pentru întreaga înnoire

¹ Probabil că nu există știință în care, ca în logică, să se fi redescoperit de atîtea ori — și la distanțe în timp atît de impresionante — lucruri de atîtea ori redescoperite. Care să fie oare cauza? Este adevărat că și în alte științe întîlnim cazuri similare: se redescoperă, dar mai ales se descoperă simultan, independent, aceeași propoziție sau aceeași teorie. În logică însă, teorii fundamentale au fost pur și simplu uitate, căzînd în desuetudine; este o proastă circulație a ideilor în logică, de-a lungul veacurilor, și ar fi interesant să se expliceze cauzele acestui fenomen.

a logicii ce se leagă de numele lui Frege. De vreme ce logica întemeiază matematica, nu mai poate fi vorba — ca la Boole — de aplicarea algebrei în logică. Logica trebuie să-și găsească propriile sale așezări, să stea pe propriile-i picioare. Ori de câte ori s-ar părea că un concept sau procedeu de ordin matematic își găsește aplicarea în logică, lucrurile stau așa numai din punctul de vedere al istoriei cunoașterii; în ordine teoretică, crede Frege, ideea sau procedeul matematic respectiv trimite de fapt, în forma sa generală, la logică.

Ajungem astfel la noțiunea centrală din *Begriffsschrift*, care va fi reluată într-o serie de articole ulterioare, pentru că stă la baza întregii logici a lui Frege: ideea de funcție. Frege supune unei analize logice o serie de noțiuni fundamentale (variabilă, funcție etc.), dezvăluindu-le o semnificație ascunsă, ignorată pînă la el, le generalizează, astfel încît aplicarea lor anterioară în matematică se dovedește a fi un caz particular. În generalitatea lor, aceste idei aparțin — potrivit lui Frege — logicii. Iar introducerea noțiunii de funcție logică — și în strînsă legătură cu aceasta, înțelegerea conceptului ca funcție logică —, permite elaborarea calculului predicatelor, odată cu introducerea cuantorilor în logică.

De asemenea, fără a epuiza nicidecum problematica bogată din *Begriffsschrift*, se cere amintit că Frege prezidează constituirea logicii matematice în forma ei modernă prin introducerea — sau reintroducerea² — metodei axiomatice în logică.

Cartea lui Frege a rămas la apariție aproape neobservată, iar puținele ecouri stîrnite au fost mai degrabă negative (de exemplu, recenzia făcută de E. Schröder) și aceeași indiferență va întîm-

² I se atribuie lui Aristotel — de către Łukasiewicz, de pildă — meritul de a fi construit silogistica sa ca un sistem axiomatic, ceea ce este desigur exagerat, cum remarcă unii critici ai lui Łukasiewicz, de pildă Günter Patzig. În orice caz, elemente ale metodei axiomatice pot fi întîlnite în *Analitici*: demonstrarea unor moduri silogistice din altele. Desigur, nu trebuie omisă distincția dintre metodă deductivă și metodă axiomatică.

S-a spus și despre logica stoică că este construită axiomatic, cele cinci „indemonstrabile” fiind propozițiile metalogice din care s-ar deriva celelalte. Cert este că metoda axiomatică e aplicată în logica modernă abia începînd de la *Begriffsschrift*. Cartea conține de asemenea distincția importantă între teză și regulă de deducție.

pina lucrările lui ulterioare; un vâl al tăcerii se lasă peste opera lui Frege timp de aproape două decenii. Mai ucigătoare decât orice critică, neînțelegerea sau indiferența aproape generală (printre puținele excepții notabil este Husserl. Interesul manifestat prin anii 1890 și 1900 de către Husserl va face ca opera lui Frege să se adreseze viitorului).

Așa se face că multe dintre invențiile lui Frege vor trebui reinventate; o justificare a lor mai puțin profundă și un aparat simbolic mai „cuminte“ le vor face accesibile și vor influența activ, efectiv, dezvoltarea și răspîndirea logicii matematice³.



Care să fie cauzele acestei tăceri lăsate în jurul operei lui Frege? Este drept că întreaga istorie a logicii moderne s-a izbit de indiferența matematicienilor, de ignoranța și chiar ostilitatea majorității covârșitoare a filosofilor și logicienilor. Dar izolarea în care a creat Frege pare neobișnuită, chiar dacă o raportăm la acest climat general în care s-a dezvoltat logica nouă în secolul XIX. Izbitor în cazul lui e faptul că înșiși logicienii, precum și matematicieni angajați în studiul — încă incipient — al fundamentelor științei lor nu-i cunosc sau nu-i înțeleg opera.

³ „Dezvoltarea ulterioară a logicii — scrie Bochenski — nu a pornit de la Frege. Schröder nu-l citează în 1892; Russell mărturisește în 1903 că ar fi învățat multe de la Frege dacă l-ar fi cunoscut. Întrucît însă nu-l cunoștea, l-a urmat pe Peano. Logica matematică modernă pornește — deși Peano este mai puțin profund decât Frege — de la simbolismul acestuia din urmă“ (J. M. BOCHENSKI, *Formale Logik*, Verlag Karl Albert, Freiburg-München, 1956, p. 369). La rîndul său, Bertrand Russell caracterizează distincțiile ce se cer făcute între judecata singulară și judecata universală, precum și între clasa cu un singur element și însuși acel element ca pe două „progrese pur tehnice“ de o însemnătate covârșitoare pentru filosofia matematicii și adaugă că „aceste progrese fuseseră realizate încă de Frege la o dată anterioară, dar mă indoiesc dacă Peano (prin intermediul scrierilor cărui Russell s-a familiarizat în 1900 cu aceste idei — n.n.) cunoștea lucrul acesta, iar eu nu am știut aceasta decît ceva mai tîrziu“ (BERTRAND RUSSELL, *My Philosophical Development*, în *The Philosophy of Bertrand Russell*, edited by Paul Arthur Schilpp, New York, 3. edition, 1951, p. 13).

Una din cauze, după cum notează istoricii logicii, este fără îndoială simbolismul fregean, rămas cu totul obscur contemporanilor. Acest simbolism se deosebea totalmente de cel uzitat pînă atunci în logică și matematică. „Simbolismul lui Frege este desigur cu totul remarcabil: într-adevăr, el este bidimensional. Astfel, el depășește cadrul practicii istorice a omenirii care aproape întotdeauna și-a exprimat gândurile într-o scriere unidimensională. Trebuie recunoscut că această înnoire revoluționară poartă multe cu sine — și înainte de toate o foarte însemnată extindere a posibilităților de expresie ale scrierii. Însă tocmai acest lucru era prea revoluționar: celor mai mulți, simbolismul fregean le păru de neînțeles“⁴.

Să inspectăm sumar „Scrierea conceptuală“, sau „ideografia“ lui Frege, așa cum se prezintă ea în *Begriffsschrift*, făcînd abstracție de extinderile și modificările ulterioare făcute de Frege⁵.

Să luăm o judecată (Urtheil) arbitrară, de exemplu asertarea faptului că „polii magnetici diferiți se atarg între ei“. Dacă notăm această judecată cu A (A joacă aici rolul unei prescurtări), judecata asertată va fi simbolizată prin:

| — A

iar „simplul complex de idei“, sau „conținutul“ pe care îl exprimă această judecată —, adică faptul că polii magnetici diferiți se atrag între ei (sau, mai simplu, atracția polilor magnetici diferiți⁶) — va fi redat simbolic, prin intermediul liniei orizontale:

— A

⁴ J. M. BOCHENSKI, *op. cit.*, p. 369.

⁵ În afară de folosirea altor litere grecești pentru variabile, aceste modificări privesc în special interpretarea sistemului, legat de aprofundarea și dezvoltarea ideii de funcție, precum și de introducerea distincției între „Sinn“ și „Bedeutung“ („sens“ și „semnificație“). Aceasta nu ne interesează aici.

⁶ Exemplele sînt împrumutate din lucrările lui Frege.

Negația „conținutului lui A“, adică gîndul (sau faptul, starea de lucruri) că „polii magnetici opuși *nu* se atrag între ei“ — altfel spus: non-atragerea polilor magnetici diferiți — este notată de Frege cu ajutorul unei linii verticale numită „linia negației“, după cum urmează:



iar asertarea acestui gînd negativ — o judecată negativă — se va nota, desigur:



Fie acum A și B abrevieri pentru două „conținuturi posibile de judecată“⁷. Ceea ce se numește astăzi „implicația materială“ este notată de Frege în felul următor (în cazul simplului gînd):



⁷ Frege subliniază că A este simplu gînd, conținut de judecată, dar nu încă judecată. Judecata este — la Frege — recunoașterea adevărului unui gînd; ea se constituie deci prin aplicarea, în final, a operației de asertare la „conținutul judicabil“, la gînd. Asertarea nu este o operație de același gen cu operațiile logice propriu-zise cum ar fi negația, conjuncția ș.a. Ea reprezintă asentimentul subiectului care judecă la conținutul judicabil, punerea lui ca adevărat, printr-o „atitudine propozițională“ (cum am spune astăzi) ireductibilă.

⁸ Il urmărim aici pe Frege (*Begriffsschrift*, secțiunea 1). În prima secțiune, Frege face distincția importantă între cele două tipuri de simboluri logice: variabile și constante, între „cele care pot fi considerate că înseamnă diferite lucruri și cele care au un sens pe deplin determinat“. În exemplele de mai sus, A nu era o variabilă, dar înțelesul ei era precizat în context. Literele A și B în toate exemplele ce urmează trebuie sau cel puțin pot fi privite ca variabile. (Trebuie subliniat că înțelesul termenului „variabilă“ va fi precizat și corectat în lucrările ulterioare ale lui Frege, „variabilă“ putînd însemna lucruri diferite).

respectiv, în cazul asertării:



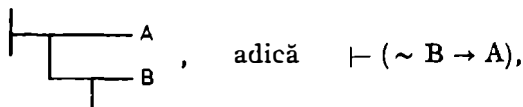
Această notație corespunde formulei

$$(B \rightarrow A)$$

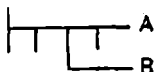
cu care sîntem familiarizați din lucrările mai recente de logică.

Verticala care unește cele două orizontale este numită de Frege „linie condițională” („Wenn-So-Strich”).

Judecata „A sau B” (disjuncția neexclusivă) se definește ca:



iar judecata „A și B” (adică $\vdash \sim (B \rightarrow \sim A)$) ca:



Mai departe, Frege introduce notații pentru funcții de un argument, de două argumente:

$$\Phi (A), \Psi (A, B) \text{ etc.}$$

Judecata că funcția $\Phi (A)$ este satisfăcută pentru toate argumentele sale este notată de Frege cu ajutorul unei concavități în care figurează ceea ce astăzi s-ar numi „variabila legată”.



ceea ce ar corespunde aproximativ formulei:

$$(a) \Phi(a)$$

Cuantorul existențial⁹ este definit pe baza celui universal. Judecata „există Φ -uri” este simbolizată:

$$\vdash \exists a \Phi(a)$$

(intr-adevăr: $(\exists a)\Phi(a)$ „înseamnă că $\sim(a) \sim \Phi(a)$).

Judecata de forma „toți X sînt P ” (forma pe care Russell a numit-o mai tîrziu „implicație formală” și care transcrie în formă generalizată structura judecăților universal-afirmative din silogistica aristotelică) se notează așadar în felul următor:

$$\vdash \forall a \begin{matrix} P(a) \\ X(a) \end{matrix}$$

Simbolismul lui Frege este interesant în mai multe privințe.

În primul rînd, așa cum observă J. M. Bochenski, el premerge notația poloneză („die später in Anlehnung an Frege durch Łukasiewicz geschaffene Symbolik”)¹⁰. După cum se știe, Łukasiewicz scrie functorul (semnul funcției) înaintea semnelor argumentelor, ceea ce permite să se elimine parantezele.

Avem impresia că notația lui Frege este totuși mai sugestivă decît cea a lui Łukasiewicz (deși mai puțin economică), prin faptul că structura unei formule, împărțirea ei, precum și a fiecăreia dintre subformulele componente de un ordin arbitrar în antecedent și consecvent poate fi sesizată imediat, în mod vizual.

De asemenea, este interesant că Frege nu introduce simboluri cu totul noi pentru „functorii” definiți pe baza implicației și negației; scrierea sa ne permite să considerăm notația pentru „sau” „și” etc. atît ca simbol nou introdus, abreviativ pentru ceea ce

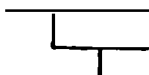
⁹ Denumirea de „cuantori” a fost introdusă mai tîrziu (1887) de către Peirce. Peirce și Mitchell au descoperit concomitent cuantorii, fără a cunoaște lucrările lui Frege. Prin ei, via Peano, a intrat în circuitul logicii teoria cuantorilor (cf. J. M. BOCHENSKI, *op. cit.*).

¹⁰ J. M. BOCHENSKI, *op. cit.*, p. 358.

se defineşte în termeni de implicaţie şi negaţie, cit şi ca definiţie explicită. De exemplu:



se poate citi ca „dacă non-A atunci B“, convenind să înţelegem ca şi înainte notaţia lui Frege ca incluzînd liniuţa negaţiei (afectînd pe A) şi linia „condiţionalului“ care leagă non-A de B. Dar — aici intervine elementul nou — formula se poate citi direct: „A sau B“, deoarece



poate fi considerat ca un simbol simplu pentru „sau“. Această ambiguitate grafică este o particularitate a simbolismului lui Frege care nu poate fi regăsită în simbolismul lui Łukasiewicz sau al lui Peano-Russell etc., ea datorîndu-se caracterului într-adevăr „ideografic“ al semnelor utilizate.

Simbolismul dificil din *Begriffsschrift* nu poate fi făcut responsabil în exclusivitate pentru neînţelegerea generală a operei lui Frege. Acest factor s-a adăugat altor motive, mai substanţiale.

Ocupîndu-se de „motivele subaprecierii scrierilor lui Frege“, P. H. Nidditch alătură celui de mai sus, altele trei:

(1) Faptul că, în general, „acei ce se ocupau de filosofie erau îndemnaţi să nu se apropie de o întreagă masă de semne — şi cu atît mai puţin să o parcurgă —, cînd scopul acestei mase de semne era de a sprijini o teorie a filosofiei — în cazul de faţă, a filosofiei matematicii. Convingerea lor era (şi este) că un argument pro sau contra unei atari teorii trebuia prezentat în limbajul cotidian, deoarece valoarea teoriei depinde de punctele ei de pornire şi de adevărul opiniilor care stau în spatele acestora; ar fi însă imposibil ca acestea să se sprijine pe ceva înăuntrul

unei structuri de tip matematic, ele se pot sprijini numai pe argumente exterioare structurii¹¹.

La observația lui Nidditch se cuvine a fi ratașată explicația mai profundă a lui Heinrich Scholz — unul din primii istorici ai logicii care a înțeles adevăratele dimensiuni ale operei lui Frege. H. Scholz relevă rolul nefast al climatului filosofic dominant în Germania și face responsabilă pentru ignorarea operei lui Frege tirania filosofiei lui Kant și Hegel. „... Influența criticii kantiene a fost atât de mare încît efectiv ea determină în mod categoric pînă la această oră filosofia germană. De la *Kant*, filosofia germană în ansamblu s-a îndepărtat atât de mult de orice efort în direcția unei logici leibniziene încît ea nu a putut găsi o cale de acces la *Frege*“. Influența lui Hegel a fost de asemenea dăunătoare, ea făcînd să se renunțe la abordarea matematicii și a gîndirii matematice¹².

(2) „O altă cauză — scrie Nidditch — rezida în faptul că teoria lui Frege era atât de surprinzătoare și atât de îndepărtată de teoria probabilă încît păreau să existe prea puțini sorți ca efortul de a urmări în amănunt deducțiile prezentate să fie răsplătit¹³.

Surpriza pe care o provoca teoria lui Frege trebuie desigur raportată și ea la mediul filosofic-cultural în care creează marele logician. Germania filosofiilor de catedră, a neo-kantianismului, a logicii psihologice și empiriste nu putea accepta nici logicismul leibnizian al lui Frege, nici ideea caracterului obiectiv al adevărului.

Și în sfîrșit:

(3) „... Ceea ce făcea Frege se abătea de la cărarea cea dreaptă și strîmtă: nu era matematică absolut normală, nu era filosofie absolut normală și nu era logică absolut normală. Nu era matematică normală; erau fundamentele matematicii. Nu era filosofie normală: era filosofia matematicii, profesată de un cu-

¹¹ P. H. NIDDITCH, *The Development of Mathematical Logic*, Routledge & Kegan Paul, London, 1962, p. 61.

¹² HEINRICH SCHOLZ, „Die klassische deutsche Philosophie und die neue Logik“. Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique, VIII, Histoire de la Logique et de la Philosophie Scientifique, Paris, 1935 („Actualités Scientifiques et Industrielles“, nr. 395), p. 3.

¹³ P. H. NIDDITCH, *op. cit.*, p. 61.

noscător de prim rang al matematicii. Și nu era logică normală: nu era algebra logicii («Normal» este luat în raport cu perioada 1875—1900)¹⁴.

Nici prin obiect, nici prin conținut, nici prin metodă de expunere și formă exterioară lucrările lui Frege nu erau adaptate la mediu, la mentalitatea și așteptările comunității științifice din care făcea Frege parte¹⁵.

Credem că un rol esențial în soarta operei lui Frege l-a avut caracterul filosofiei sale, orientarea sa în direcția realismului moderat, cu unele elemente de materialism spontan; această tendință neostentativă, mai curînd implicită și aplicată strict la obiectul cercetării era de natură să stîrnească dacă nu ostilitate, atunci cel puțin o sinceră și profundă neînțelegere sau lipsă de interes¹⁶.



După o serie de articole care reiau și aprofundează motivele din *Begriffsschrift*, Frege dă la iveală în 1884 cartea sa *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl (Fundamentele aritmeticii. O cercetare logico-matematică asupra conceptului de număr)*, Breslau, 1884.

Cartea lui Frege marchează un moment crucial în fundamentele matematicii. Într-o admirabilă împletire a analizei logice și filosofice — care va fi adîncită și formalizată ulterior, în *Grundgesetze der Arithmetik* — Frege dezvoltă programul logicist de fundare a aritmeticii. Dacă „*Begriffsschrift*“ aplica noul calcul „ideografic“ pentru deducerea unor teoreme matematice (din teo-

¹⁴ P. H. NIDDITCH, *op. cit.*

¹⁵ Nu trebuie pierdut din vedere că însăși algebra logicii nu era acceptată ca „logică normală“ de imensa majoritate a logicienilor și filosofilor germani; ea era cunoscută și prețuită de cîțiva matematicieni, elaborată de o infimă minoritate (Ernst Schröder) și, în sfîrșit, nu se întrevedea posibilitatea aplicării ei în studiul fundamentelor matematicii. Nu puțini erau matematicienii care aveau rezerve serioase față de această disciplină. Nici-Matematică-Nici-Logică! — Ceea ce făcea Frege era deci de două ori „anormal“!

¹⁶ Frege însuși se plînge nu o dată de această neînțelegere sau ignorare tacită. Vezi, de exemplu, Introducerea la *Grundgesetze der Arithmetik*, vol. I, 1893.

ria şirurilor), *Fundamentele aritmeticii* pun însăşi problema naturii propoziţiilor aritmetice şi a conceptului de număr.

În centrul criticii lui Frege se află concepţia lui Kant, după care legile aritmeticii ar fi adevăruri sintetice apriorice, precum şi empirismul lui Mill. Frege respinge teza că legile aritmeticii ar fi adevăruri inductive, „legi ale naturii“ şi contestă punerea pe acelaşi plan a adevărilor analitice ale aritmeticii cu adevărurile sintetice ale geometriei.

Leibniz încercase şi el să demonstreze propoziţiile aritmetice, plecând de la definiţii. Programul lui Frege este mai complex. Logicismul modern merge mai departe în afirmarea răspăcată a caracterului analitic al propoziţiilor matematicii.

Propoziţiile aritmetice sînt — după Frege — apriorice şi analitice; totodată, ele nu au structura judecăţilor categorice *in esse*. Termenul „aprioric“ are însă la Frege o altă rezonanţă decît la Kant, el nefiind legat de o „răsturnare copernicană“ a raportului dintre subiectul cunoscător şi obiectul cunoaşterii şi nefiind legat de doctrina după care subiectul cunoscător creează, dacă nu obiectul, atunci cel puţin Obiectul-Aşa-Cum-Este-El-Cunoscut. Pe de altă parte, analiticitatea propoziţiilor aritmetice nu mai este de natura inerentei necesare a predicatului la subiect.

Spunînd că propoziţiile asertate ale aritmeticii au un caracter analitic, Frege are în vedere faptul că ele sînt *adevăruri logice*. Caracterul lor logic nu este însă evident. De aici, încercarea de a demonstra această afirmaţie.

Tentativa de a releva adevărurile aritmeticii în calitate de adevăruri logice are la Frege o bază incomparabil mai solidă decît la Leibniz. Se afirmă nu numai că aritmetica este o ştiinţă strict deductivă, ale cărei adevăruri decurg în formă pură din definiţii admise iniţial, dar se preconizează totodată să fie explicitată logica după care se desfăşoară demonstraţiile, se cer a fi precizate regulile de deducţie pe care le folosim. În al doilea rînd, Frege susţine că înseşi noţiunile aritmeticii sînt în fapt noţiuni logice. Scopul principal este deci definirea conceptului de număr (începînd cu definirea numărului natural) şi rezultatul nou este acela că definiţiile aritmeticii nu folosesc decît termeni logici: *concept, extensiune a conceptului, relaţie, obiect, „şi“, „dacă... atunci“, „nu“, „toţi“, „există cel puţin un...“* ş.a.

Principiile după care s-a călăuzit Frege sînt următoarele:
„... Trebuie să distingem întotdeauna în mod riguros psihologicul de logic, subiectivul de obiectiv;

semnificația cuvintelor nu trebuie căutată în izolarea lor, ci numai în contextul propoziției;

„trebuie avută în vedere distincția dintre concept și obiect”¹⁷.

Sensul primului principiu este clar — el situează de la bun început demersul pe planul unei logici antipsihologice, care cercetează nu reprezentările, imaginile, ideile individuale din mintea omului, ci conceptul ca entitate obiectivă.

Al doilea principiu este justificat de Frege prin conexiunea lui firească cu primul, căci — spune dînsul — „cînd nu se respectă al doilea principiu ne vedem siliți să acceptăm în calitate de semnificații ale cuvintelor imagini mentale sau acte ale psihicului individual, încălcînd astfel primul principiu”¹⁸.

Principiul citat este aplicat de Frege pe scară largă în *Grundlagen der Arithmetik*, pentru detectarea înțelesului cuvintelor, în special al numeralilor, și pentru a înlătura suprapunerile de sensuri sau aparențele înșelătoare care ascund semnificația reală a cuvintelor.

Frege dovedește o subtilitate inegalabilă, de filosof analist (în sensul contemporan al cuvîntului) în elucidarea sensului propozițiilor din limbajul obișnuit, în rîndul cărora se numără și propoziții de „aritmetică aplicată” (de ex.: „Pămîntul are doi poli”, „un măr și încă un măr fac două mere”) ¹⁹, precum și a sensului propozițiilor pur aritmetice. Principiul își găsește totodată o aplicație în unul din instrumentele esențiale ale cercetării lui Frege — „definițiile prin abstracție”, cum au fost ele numite mai tîrziu.

În sfîrșit, al treilea principiu — distincția între concept și obiect — atinge însuși miezul logicii lui Frege, deoarece — se poate spune — sistemul său logic se axează pe această distincție teoretică, dezvoltată tocmai în articolele din culegerea de față.

¹⁷ FREGE, *op. cit.*, Introducere, p. X, 1950. În volumul de față, p. 37.

¹⁸ *Ibid.*

¹⁹ Este de văzut distincția dintre aceste două propoziții. Prima poate fi considerată o propoziție factuală propriu-zisă în timp ce a doua este o aplicație și o consecință a unui adevăr aritmetic.

Care sînt rezultatele principale ale analizei lui Frege?

Frege respinge anumite opinii despre număr și adevăruri aritmetice, opinii provenite din surse filosofice variate. De exemplu, potrivit unei variante a empirismului, definițiile numerelor exprimă, fiecare în parte, fapte observate, adevărurile aritmeticii fiind „legi ale naturii“, adevăruri inductive (J. St. Mill); după Kant, dimpotrivă, legile aritmeticii ar fi sintetice — *a priori*. Ambele soluții îi apar lui Frege nesatisfăcătoare.

Frege subliniază că numărul nu este obiect al psihologiei, ci o entitate obiectivă, la fel cum în genere semnificația fiecărui cuvînt — dacă ea există — este obiectivă.

Înțelegînd obiectivitatea — ca independență față de senzație și de reprezentarea psihică individuală, dar nu ca independență față de rațiune²⁰, Frege face o profesiune de credință *raționalistă*, delimitîndu-se net de empiriști. Antipsihologismul lui Frege este de nedespărțit de anti-empirismul său.

Prin „rațiune“, Frege nu are în vedere gîndirea individuală și subiectivă, sau în genere procesele psihice ținînd de sensibilitate sau de intelect. Pentru Frege, procesul gîndirii individuale diferă de la individ la individ, și ca atare nu poate fi chezaș al obiectivității. Rațiunea — lasă a se înțelege Frege, deși nu într-un mod prea deslușit — este elementul comun, de gen, inerent tuturor gîndirilor individuale, este ceea ce permite comunicarea lingvistică umană eficientă, înțelegerea propozițiilor în același mod, în pofida diversității reprezentărilor individuale. Rațiunea este tocmai depășirea subiectivității în intersubiectivitate și în obiectivitatea deplină a adevărului.

La adevăr ajungem numai prin gîndire. Pentru Frege, gîndirea este garantul obiectivității.

Raționalismul lui Frege nu este al unui idealist obiectiv și nici al unui neokantian pentru care obiectivitatea se rezumă la intersubiectivitate, consens uman; adevărul propoziției este independent de om și omenire. Idealismul obiectiv, dar nu neapărat și raționalismul transformă *gîndirea* sau *gîndul* în factor *onto-*

²⁰ Termenul de „rațiune“ se întâlnește mai ales în *Die Grundlagen der Arithmetik*. În lucrările ulterioare, Frege vorbește numai despre „gînd“ (Gedanke) și „gîndire“ (Denken). Gîndirea însă — spre deosebire de gînd — este în afara logicii.

logic, în lume, sau în creator de lume, suflet universal al lumii etc.

Raționalismul lui Frege implică însă numai un realism moderat. Ontologia lui Frege — dacă se poate vorbi la modul propriu despre ontologie — este *formală* și nu *filosofică*. Ea ar consta dintr-o serie de afirmații despre anumite entități abstracte („obiecte”, „funcții”, „concepte”, „relații”) și dintr-o teorie logico-matematică despre raporturile generale ale acestor entități. Această teorie prezintă desigur interes filosofic și *poate* căpăta o coloratură pronunțat filosofică, însă, așa cum se înfățișează ea, nu este încă filosofică. Ea este suficient de incompletă pentru a nu intra în raza curenților filosofice.

În spiritul unui raționalism consecvent, dar unilateral, care face abstracție de geneza ideilor abstracte, de legătura lor cu activitatea subiectului, Frege afirmă în *Fundamentele aritmeticii* că obiectivitatea este independentă față de senzații, dar nu și față de rațiune; afirmația are la Frege un sens nu ontologic, ci gnoseologic: rațiunea decelează obiectivitatea, o descoperă *acolo unde ea este*, o pune în joc.

Contextul în care apare afirmația de mai sus arată că Frege avea în vedere infirmarea psihologismului plat, a ideii că gândirea este pur subiectivă. Frege nu neagă subiectivitatea procesului individual de gândire, dar susține că logica și matematica nu au de-a face cu gândirea subiectivă, ci cu gândul-obiectiv, deci cu *conținutul obiectiv al gândirii*: „Eu fac o distincție între ceea ce este obiectiv (das Objektive) și ceea ce este imediat sesizabil, spațial sau real. Axa Pământului și centrul de gravitate al sistemului solar sînt obiective, dar eu n-aș spune că sînt reale, așa cum real este Pământul însuși. Vorbim adesea despre ecuator ca despre o linie imaginată; ar fi însă fals să spunem că este o linie imaginată; ea nu provine din gândire, nu este rezultatul unui proces psihic, gândirea nu face decît să o recunoască, să o conceapă ca atare. Dacă a fi recunoscut ar însemna a fi generat, atunci nu am putea afirma nimic pozitiv despre ecuator, referitor la perioada care precede această pretinsă geneză”²¹.

²¹ În volumul de față, pp. 71—72.

La fel de obiective, dar nu reale, adică lipsite de spațio-temporalitate, senzorialitate, realitate sînt — potrivit lui Frege — numerele. Obiectivitatea lor se *manifestă* în adevărul obiectiv al propozițiilor.

Numerele sînt obiecte, dar nu pentru simțuri, întrucît ele nu sînt obiecte materiale, adică concret-senzoriale, ci ideale; pe de altă parte însă, nu sînt nici creații ale conștiinței, fapte subiective.

Definiția numărului se obține în etape. Mai întîi, Frege stabilește faptul că numerele — contrar aparenței — nu exprimă proprietăți ale obiectelor; dacă analizăm enunțurile numerice, constatăm că în ele numerele nu se atribuie nemijlocit obiectelor, ci se atribuie *conceptelor*. De exemplu, în propoziția: „Trăsura împăratului este trasă de patru cai“, numărul patru este atribuit conceptului „cal care trage trăsura împăratului“.

Obiectivitatea acestor enunțuri numerice derivă din obiectivitatea conceptului: „Dacă deci conceptul este ceva obiectiv, o aserțiune despre acesta poate conține de asemenea ceva faptic“.

Pornind de la această premisă, Frege stabilește prin intermediul unei minuțioase analize definiția logică a numărului și sugerează modul în care proprietățile principale ale numerelor, relațiile dintre ele, legile operațiilor cu numere naturale pot fi transcrise, definite, prin intermediul unor noțiuni pur logice, pornind de la definițiile introduse mai sus.

În prelungirea acestei propuneri, Frege își exprimă convingerea că adevărurile aritmeticii sînt la rîndul lor analitice *a priori*. Concluzia, după opinia autorului *Fundamentelor aritmeticii* apărea ca „foarte probabilă“.

Însă ea trebuie demonstrată, pas cu pas.



Fundamentele aritmeticii nu făceau decît să schițeze programul de fundare a aritmeticii pe baza logicii. Traducerea în practică a acestui program impunea formalizarea integrală a logicii și a aritmeticii, prezentarea lor sub forma unui sistem deductiv formal, axiomatizat. Limbajul simbolic, „ideografic“, trebuia să confere programului logicist rigoarea necesară, oferind un mijloc efectiv de control al justeței tezei logiciste.

Acestui obiectiv îi este consacrată opera capitală a lui Frege, *Legile fundamentale ale aritmeticii*²². Sinteză a eforturilor de o viață întreagă ale lui Frege, reîntîlnim în ea toate temele majore ale filosofiei fregeene, așa cum ele se conturau încă în „Begriffsschrift“ și așa cum au fost ele dezvoltate în *Fundamentele aritmeticii* și în articolele ulterioare.

În perioada 1884—1893, cînd pregătește primul volum din *Legile fundamentale ale aritmeticii*, Frege dezvoltă totodată într-o serie de articole²³, concepțiile sale în două domenii hotărîtoare:

1. Teoria despre funcție, concept și obiect.
2. Semantica logică.

Există o intimă legătură între concepția logico-filosofică despre funcție, concept și obiect, semantica și sistemul formal al lui Frege.

Centrul spre care converg toate aceste linii de forță îl constituie sistemul formal care primește denumirea de *ideografie*, scriere conceptuală: „Begriffsschrift“. Pe baza a cinci axiome, a unor idei logice primitive, a unor reguli de definiție și a unor reguli de deducție, Frege derivă principalele teoreme ale aritmeticii și definește noțiunile de bază ale aritmeticii în calitate de construcții logice.

În *Introducerea* la primul volum, Frege făcea o prezentare generală a conținutului cărții sale și a modului de expunere adoptat, subliniind elementele noi și modificările introduse.

Avertizat de indiferența și neînțelegerea cu care fuseseră întâmpinate contribuțiile sale anterioare, Frege era conștient că receptarea cărții sale va fi îngreunată nu numai de dificultățile pe care le întâmpină lectura unui text matematic, ci și de climatul subiectivist și formalist dominant în logica și matematica vremii sale.

²² *Grundgesetze der Arithmetik, Begriffsschriftlich abgeleitet*, Band I, Jena, 1893; Band II, 1903. Reeditate la Georg Olms Verlag, Hildesheim, în 1962.

²³ „Function und Begriff“, Jena, 1891; „Über Begriff und Gegenstand“, 1892; „Über Sinn und Bedeutung“, 1892; „Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröders Vorlesungen über die Algebra der Logik“ (1895) ș.a.

Contestînd formalismul matematic (în sensul prehilbertian al cuvîntului), Frege dezvoltă ideea că matematica nu are ca obiect semnele și operațiile cu semne, ci ceea ce aceste semne exprimă; definițiile nu au putere creatoare: ele nu generează obiecte noi, nu au puterea miraculoasă de a înzestra obiectele existente cu proprietăți și relații noi.

Divergența dintre concepțiile lui Frege și cele psihologiste pornește de la concepția asupra adevărului. „Pentru mine — scria profesorul de la Jena — ceea ce este adevărat constituie ceva obiectiv și independent de subiectul care judecă; pentru logicienii psihologiști lucrurile nu stau la fel. Ceea ce domnul B. Erdmann numește «certitudine obiectivă» este doar un asentiment general obținut din partea subiecților care judecă și, ca atare, nu este independentă față de aceștia, ci este susceptibilă să se altereze, odată cu structura psihicului lor”²⁴.

Frege privea logica psihologistă ca pe enorma povară pe care concepția sa logică trebuia s-o dea la o parte, pentru a răzbi la suprafață și a dobîndi recunoașterea generală.

În Introducerea la primul volum, Frege își manifestă explicit îngrijorarea în legătură cu eventualele critici pe care le putea suscita cartea sa, date fiind aparenta lipsă de accesibilitate a cărții sale și mai ales rezistența pe care vor avea să le întîmpine concepțiile sale filosofice. Privitor la trînicia sistemului formal însă, Frege nu avea ezitări și, aruncînd mînușa, făcea din „demonstrațiile legilor fundamentale ale numărului” o piatră de încercare a convingerilor sale logice²⁵. Optimist, el scria: „*Prima facie*, este improbabil ca o asemenea structură să fi fost ridicată pe o temelie nesigură sau defectuoasă. Oricine împărtășește alte convingeri nu are decît să încerce a ridica o structură asemănătoare pe aceste temelii; cred că el își va da seama că ea nu funcționează sau cel puțin nu funcționează atît de bine. Ca infirmare, în această privință n-aș putea recunoaște decît o demonstrație efectivă dată de cineva că un edificiu mai bun, mai durabil, poate fi ridicat pe temelia altor convingeri fundamentale, sau, dacă nu, demonstrația faptului că principiile mele duc la concluzii evident false. Dar nimeni nu va fi în stare să facă

²⁴ *Grundgesetze der Arithmetik*, vol. I, Introducere, p. XVIII.

²⁵ *Ibidem*, p. XXVI.

aceasta. Fie atunci ca, deși cu întârziere, cartea mea să contribuie la o reînnoire a logicii²⁶.

Aceste rînduri erau scrise în Introducerea la primul volum, în iulie 1893. Cu un deceniu mai tîrziu, în octombrie 1902, cînd cincuașezău-șezău Frege adăuga o neprevăzută postfață (Appendix) la al doilea volum din *Grundgesetze der Arithmetik*, pe atunci aflat sub tipar, situația se schimbase cu desăvîrșire, luînd o întorsătură uluitoare.

Mai întîi, se găsisese cititorul avizat, atent, pe care și-l dorise atît de mult, de-a lungul unui sfert de veac de activitate științifică, solitarul profesor de la Jena. În Introducerea la primul volum, Frege scrisese: „Ultima mea speranță este ca cineva să aibă suficientă încredere în problematica tratată spre a considera profitul intelectual drept o recompensă îndestulătoare și ca el să facă public rezultatul examinării sale minuțioase. Nu [vreau să spun] că numai o recenzie laudativă m-ar putea satisface; dimpotrivă, aș prefera un atac extrem de informat unui elogiu făcut în termeni generali și care nu ajunge la rădăcina lucrului²⁷.

Acest cititor avizat se numea Bertrand Russell. Asistase la Congresul Internațional de Filosofie de la Paris (1901) și fusese impresionat de comunicarea prezentată de Peano; lectura lucrărilor lui Peano îl determinase apoi să se familiarizeze cu lucrările lui Frege. Însușindu-și programul logicist, Russell a supus unei examinări într-adevăr minuțioase opera lui Frege. Lectura cărților lui Frege i-a lăsat o impresie neștersă și a fost unul din evenimentele memorabile ale vieții sale intelectuale. Russell este, probabil, primul gînditor care a sesizat la justa lor valoare contribuțiile logicianului german și le-a popularizat, înfrîngînd consensul tăcerii căruia îi căzuse victimă Frege.

Dar — ce ironie! — tocmai triumful lui Frege, începutul de notorietate tîrzie pe care și l-a cîștigat, este legat de cea mai mare decepție a vieții sale, și anume de dezvăluirea unui viciu fundamental al întregului sistem, de descoperirea unui paradox înăuntrul sistemului.

Provocarea aruncată de Frege și convingerea că „nimeni nu

²⁶ *Ibidem*.

²⁷ *Ibidem*, p. XII.

va fi în stare" să demonstreze că principiile sale ar duce la concluzii evident false s-au ciocnit de evidența neașteptată în sensul contrar.

Proporția evenimentului depășește însă pină și cadrul operei lui Frege. Descoperirea paradoxului afectează nu numai sistemul formal fregean, ci subminează înseși fundamentele evidente, incontestabile de pină atunci ale logicii și ale teoriei mulțimilor. *Chestiunea fundamentelor matematicii, în general, se pune într-un mod nou, de-a dreptul dramatic.*

Perspectiva relativistă se încetățenește virtual în matematică, încă din prima jumătate a secolului al XIX-lea, odată cu descoperirea geometriei lui Lobacevski-Bolyai. Dar relativismul nu fusese întovărit de scepticism și de fenomenele de criză filosofică care agitau științele naturii spre sfârșitul secolului XIX, în urma descoperirilor epocale din fizică.

Pină atunci, totul lăsa să se creadă că explorarea fundamentelor științelor matematice constituie un marș triumfal. E drept că drumul era presărat de jertfe individuale, că cerea îndrăzneală revoluționară din partea puținilor savanți care întreprindeau acest demers bizar, ciocnindu-se de indiferența sau opiniile conservatoare ale majorității savanților; însă nici o piedică teoretică nu se întrezărea în înfăptuirea programului de așezare a întregului edificiu matematic pe temelii inzdruncinabile. Primul pas — atât de promițător — de reducere a problemei fundării întregii matematici, inclusiv geometria, la problema fundării aritmeticii fusese deja înfăptuit, iar eforturile disperate ale adeptilor teoriei mulțimilor și ale logicismului concureau la atingerea țelului final.

Cît privește logica, în pofida controverselor filosofice care o agitau, în pofida opoziției dintre logica tradițională și „logica nouă” a lui Boole, Schröder, Frege, Peano, nimic nu părea să anunțe că înseși temelile ei, presupuzițiile sale evidente, vor fi puse în discuție, vor sta sub semnul întrebării, că în loc de a aduce o nouă certitudine, logica nouă va înscăuna „permanența provizoratului”.

Într-un asemenea climat de calmă speranță, descoperirea unui paradox — comunicat de Russell într-o scrisoare adresată lui Frege — a explodat ca un trăsnet din senin.

Reacția lui Frege la descoperirea paradoxului, vădind perplexitatea autorului, este semnificativă. Ea diagnostichează fără greș existența unei crize generale a fundamentelor. Este marcat sfârșitul unei epoci și începutul alteia noi, de criză. Comentariul lui Frege merită a fi citat *in extenso*: „Cu greu i se poate întâmpla unui autor științific ceva mai neplăcut decât zdruncinarea unuia din stîlpii edificiului său, după ce lucrarea a fost terminată.

În această situație am fost pus în urma unei scrisori a d-lui Bertrand Russell, tocmai atunci cînd tipărirea acestui [al doilea] volum se apropia de sfârșit. Este vorba de *Legea mea Fundamentală* (V). Nu mi-am ascuns niciodată faptul că ea este lipsită de evidența pe care o au celelalte legi și care trebuie cerută, în fapt, unei legi a logicii; într-adevăr, am și subliniat această lacună în *Introducerea la primul volum* (pp. 3—4). Aș fi renunțat bucuros la acest stîlp de sprijin, dacă aș fi cunoscut un înlocuitor al său. Chiar și acum eu nu văd cum aritmetica poate fi fundamentată în mod științific, cum numerele pot fi concepute ca obiecte logice și supuse studiului, dacă nu ne este îngăduit — cel puțin în mod condiționat — să trecem de la un concept la extensiunea lui. Este oare întotdeauna permis să vorbim despre extensiunea unui concept, despre o clasă? Iar dacă nu, cum recunoaștem excepțiile? Putem oare deduce întotdeauna din coincidența extensiunii unui concept cu extensiunea altui concept că orice obiect care cade sub primul concept cade, de asemenea, sub cel de-al doilea? Iată problemele ridicate de comunicarea d-lui Russell.

Solatium miseris, socios habuisse malorum. Am și eu această consolare, dacă într-adevăr este o consolare; oricine a făcut uz în demonstrațiile sale de extensiuni ale conceptelor, de clase, mulțimi*, se află ce-i drept, în aceeași situație. Nu este vorba anume de metoda mea specială de așezare a fundamentelor, ci de faptul dacă în genere este posibilă o fundamentare logică a aritmeticii²⁸.

În același Appendix, Frege explora cu luciditate toate solu-

* „Sistemele“ domnului R. Dedekind se înscriu și ele la aceeași rubrică (nota lui Frege).

²⁸ *Grundgesetze der Arithmetik*, vol. II, Jena, 1903, Appendix, p. 253.

țiile posibile, propunea o modificare (care ulterior s-a dovedit nesatisfăcătoare) și conchidea totuși într-o manieră relativ optimistă: „Problema primordială a aritmeticii este: în ce mod trebuie să concepem obiectele logice și, în particular, numerele? Prin ce mijloace sîntem îndreptățiți să recunoaștem numerele ca obiecte? Chiar dacă această problemă nu este rezolvată în măsura în care, atunci cînd am scris acest volum, credeam că ar fi, eu nu mă îndoiesc totuși că drumul către soluție a fost descoperit”²⁹.

Dezvoltarea ulterioară — și foarte rapidă — a cercetărilor în domeniul fundamentelor matematicii a depășit cadrul statornicit de Frege. Programul logicist a fost preluat de către Russell și Whitehead, continuatorii lui Frege și Peano. În același timp, Zermelo a dat prima axiomatizare a teoriei mulțimilor, Hilbert a preconizat programul său formalist iar intuiționismul lui Brouwer a abandonat legea terțiului exclus, în tot altelea tentative separate de soluționare a problemelor fundamentale.

Frege n-a abandonat încercarea de a găsi ieșirea din impas și n-a renunțat să se mai ocupe de fundamentele aritmeticii. S-a spus despre el că, asemenea pitagoreicilor după descoperirea numărului irațional, s-ar fi refugiat în pura geometrie. Manuscrisele postume — editate astăzi — dezminț această părere; Frege a continuat să caute o soluție, dar spre sfîrșitul vieții s-a văzut silit să recunoască irealizabilitatea programului logicist și a încercat să găsească o fundare geometrică a teoriei numerelor.

În ultimele două decenii ale vieții sale, Frege s-a ocupat totodată de fundamentele geometriei, criticînd abordarea hilbertiană, polemizînd împotriva filosofiei formaliste a matematicii³⁰.

Dar Frege nu a părăsit nici preocupările de logică pură. Spre sfîrșitul vieții sale, Frege a publicat trei articole: „Gîndul”, „Negăția” și „Gîndurile compuse”³¹, în care dezvoltă teoria sa logică,

²⁹ *Ibidem*, p. 265.

³⁰ „*Über die Grundlagen der Geometrie*” (Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, vol. 15, 1906, pp. 293—309, 377—403, 423—430).

³¹ „Der Gedanke”, *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*, 1 (1918—1919), pp. 58—77; „Die Verneinung”, *Beiträge...*, 1, pp. 143—157; „Gedankengefüge”, *Beiträge...*, 3 (1923—1926), pp. 36—51.

accentuind elementele ei antikantiene și realiste. Frege a rămas pînă la sfîrșitul vieții sale adeptul aceleiași filosofii a logicii. Consecvența concepțiilor sale logico-filosofice îl izola, în epoca sa. Astăzi, redescoperim cu un interes viu concepția fregeană despre logică, originală, fecundă și stimulatorie.

Dacă în 1925, cînd a încetat din viață, Frege era puțin cunoscut, iar logica lui Russell monopoliza atenția logicienilor, un reviriment avea să se producă mai tîrziu. Pregătită lent — îndeosebi sub egida școlii logice de la Münster încheată de Heinrich Scholz — această reîntoarcere la Frege a devenit o evidență în zilele noastre.

Dar înseamnă acest „înapoi la Frege“, acest neofregeanism, un regres? Este apanajul marilor gînditori de a investi în creația lor mai mult decît poate să absoarbă o singură generație. Gîndirea lui Frege stimulează mersul înainte al gîndirii logico-filosofice. Crepusculul neopozitivismului reliefează viu — prin contrast — viabilitatea unor jaloane ale filosofiei lui Frege, originalitatea ei.

Din ansamblul de idei al acestei filosofii, se detașează în mod special concepția despre funcții și obiecte, legată de metoda analizei logice, de semantică și ontologia subiacentă. Cele trei articole din volumul de față, „Funcție și concept“, „Despre concept și obiect“, „Ce este o funcție?“ pun în joc tocmai această problematică.



Funcție și obiect. Luînd ca punct de plecare funcțiile de un singur argument din matematică, Frege precizează înțelesul noțiunii de „funcție“, spulberînd o confuzie frecvent întîlnită: o funcție de x nu este o expresie care conține litera x , ci este ceea ce o atare expresie desemnează. În expresia unei funcții, litera x nu semnifică un număr variabil; nu există numere variabile. Literele x, y, \dots , utilizate ca variabile indică în mod indefinit numere.

Cînd spunem: „ y este funcție de x “, presupunem o lege de corelare a unui obiect arbitrar, de obicei un număr indicat în mod indefinit de către „ x “, cu un anumit obiect, pe care îl indică în mod indefinit „ y “.

Să considerăm expresia matematică a unei funcții, de exemplu:

$$„x^2 + 3x”$$

Ca însăși litera x , expresia „ $x^2 + 3x$ ” nu semnifică un anumit număr, ci indică în mod indefinit elementele unei anumite clase de numere. Dacă însă în locul lui „ x ” punem numele unui număr, de exemplu „1” (înlocuirea în cadrul expresiei fiind făcută în toate locurile în care figurează „ x ”)³², expresia obținută:

$$1^2 + 3 \cdot 1$$

va desemna, de data aceasta, un obiect determinat, și anume numărul 4.

Trecînd de la expresia „ $x^2 + 3x$ ” la expresiile „ $1^2 + 3 \cdot 1$ ”, „ $2^2 + 3 \cdot 2$ ” etc., am trecut — spune Frege — de la un semn care „indică” la un semn care „desemnează”.

Care va fi atunci semnul propriu-zis al funcției de mai sus? Litera „ x ” nu reprezintă o componentă esențială a expresiei, întrucît în locul lui „ x ” se putea introduce orice alt semn care indică în mod indefinit, de exemplu y , z etc. Punîndu-se în locul lui „ x ” numele unui *anumit argument* — adică al unui număr — se obține o expresie care *desemnează* un alt număr. Expresia căpătată prin înlocuirea lui „ x ” cu numele unui argument determinat desemnează o *valoare* a funcției și anume valoarea pe care funcția o ia pentru respectivul argument. Însăși funcția este așadar, corelația, *legea generală* care pune în corespondență fiecărui argument o anumită valoare.

Expresia funcției considerate va fi, în fapt:

$$„()^2 + 3()”$$

locurile goale indicînd unde anume va figura semnul unui argument; expresia astfel obținută semnifică valoarea funcției pentru acel argument.

Semnul unei funcții — spune Frege — este nesaturat. Această „nesaturare”, „incompletitudine” a semnelui funcțiilor se extinde

³² Se va observa că nu s-a precizat ce înseamnă un *nume*, ce înseamnă a *semnifica*, a indica în mod *indefinit*. Aceste noțiuni semantice sînt aici presupuse.

la funcțiile înseși care de asemenea pot fi metaforic numite „nesaturate“.

Valoarea funcției pentru un argument va fi deci rezultatul completării funcției cu argumentul respectiv. Argumentul însuși nu este totuși o parte componentă a funcției, după cum semnul argumentului nu este o parte a semnului funcției. Când două funcții iau aceeași valoare pentru același argument, oricare ar fi acesta din urmă, se spune că ele au același „parcurs valoric“ (Werthverlauf). Frege adoptă ca *principiu fundamental al logicii*³³ echivalența între faptul că două funcții iau, în mod general, aceeași valoare pentru același argument și identitatea „parcursurilor valorice“ ale celor două funcții.

„Parcursul valoric“ al unei funcții este însă un obiect, și nu o funcție. O condiție este echivalentă cu cealaltă³⁴. Tranziția se poate face în ambele sensuri.

Noțiunea de funcție astfel obținută este apoi generalizată.

În decursul dezvoltării matematicii, această generalizare — după cum arată Frege³⁵ — a survenit în două direcții: prin extinderea operațiilor matematice care servesc la construirea funcțiilor și prin admiterea numerelor complexe ca argumente și valori ale funcțiilor.

Evident, putem vorbi și despre funcții de două sau mai multe argumente.

Frege a generalizat însă într-un mod și mai radical noțiunea de funcție. Generalizarea survine prin admiterea ca argumente și valori ale funcției nu numai a numerelor, ci a oricăror obiecte, fără restricție. Asemenea obiecte pot fi, pe lângă numere, valorile de adevăr (Adevărul și Falsul), persoanele, lucrurile, parcursurile valorice ale funcțiilor etc.

După Frege, *Desemnatul (Semnificația) unei expresii care poate fi subiectul unei propoziții singulare este un obiect*. Considerînd că definirea propriu-zisă a ceea ce el numește obiect este imposi-

³³ Principiul este al *logicii*, într-adevăr, deoarece noțiunea de funcție este generalizată astfel încît să devină a logicii. În particular, principiul este aplicabil la concepte.

³⁴ Am amintit mai sus că acest principiu — adoptat ca lege fundamentală V în *Grundgesetze der Arithmetik* — duce la o contradicție ruinoasă.

³⁵ „Funcție și concept“, p. 253.

bilă, Frege dă numai o indicație cu privire la ceea ce înțelege el prin „obiect”. Pe scurt: „Un obiect este tot ce nu este funcție, astfel că expresia sa nu conține nici un loc liber”³⁶.

Frege generalizează noțiunea de funcție astfel încît orice *funcție* poate avea ca argument *orice obiect*. Există un singur domeniu al *tuturor* obiectelor, un unic „univers de discurs”³⁷ și orice funcție care admite ca argumente obiecte³⁸ trebuie să fie „peste tot definită” (cum am spune astăzi), adică trebuie să ia o valoare pentru orice obiecte luate ca argumente ale funcției. De exemplu, operația adunării este astfel generalizată încît expresia „ $a + b$ ” ia întotdeauna o valoare, oricare ar fi numele proprii puse în locul lui „ a ” și „ b ”. După cum scrie Frege — alegerea regulei de atribuire de valori funcției pentru orice argumente posibile este o chestiune secundară; important este doar să se dispună de o atare regulă³⁹.

Printre funcțiile care iau ca argumente obiecte există funcții de un fel deosebit: cele care iau ca valoare pentru orice argument obiectele numite valori de adevăr: Adevărul sau Falsul.

Se ajunge astfel la înțelegerea conceptului ca o funcție logică, ale cărei argumente sînt obiectele despre care fie în mod adevărat, fie în mod fals, se poate enunța conceptul.

Mai întîi, Frege observă că ecuațiile, inegalitățile și alte expresii ale Analizei matematice se pot scinda în două părți: una „completă” (adică desemnînd un obiect) și alta incompletă, adică desemnînd o entitate „incompletă”, „nesaturată”, deci o funcție.

Scindarea se poate efectua însă în mai multe feluri. De exemplu, expresia

$$„2 > 1”$$

se poate scinda în părțile: „2” și „ > 1 ”, sau în părțile: „ $2 >$ ” și „1”, sau în: „2” și „1”, pe de o parte, și „ $>$ ”, pe de altă parte.

³⁶ *Op. cit.*, p. 18; în vol. de față, p. 258.

³⁷ Cum susține în mod explicit FREGE, în „Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröders Vorlesungen über die Algebra der Logik”, în „Archiv für systematische Philosophie”, vol. 1 (1895), pp. 433—456.

³⁸ Precizarea că funcțiile în cauză iau ca argumente obiecte este necesară, deoarece există altele funcții care iau ca argumente funcții.

³⁹ „Funcție și concept”, p. 260.

Forma *generală* a expresiei, din care expresia rezultă prin particularizare, va fi, corespunzător fiecărui mod de analiză: „ $x > 1$ ”, respectiv „ $2 > y$ ”, respectiv „ $x > y$ ”.

La fel stau lucrurile cu orice enunţ.

Conceptul se relevă astfel a fi o funcţie a cărei valoare este întotdeauna o valoare de adevăr.

Cunoaşterea înţelesului abstract dat de Frege noţiunii de funcţie permite familiarizarea rapidă cu acest nou mod de analiză logică şi de formalizare, pe cât de simplu pe atât de profund.

Conceptul este desemnat de un predicat al unei propoziţii (singulare afirmative). Acest predicat este „nesaturat”. Expresia unui concept — cum spune Frege — conţine un loc gol, şi numai când acest loc este completat cu un nume propriu, sau cu altă expresie care ţine locul unui nume propriu, apare un sens complet”. De exemplu, predicatul propoziţiei „Caesar a cucerit Gallia” ar fi „...a cucerit Gallia”, locul gol arătând „nesaturarea” funcţiei, respectiv faptul că ceea ce se enunţă presupune, necesită un subiect posibil.

Pentru fiecare argument al funcţiei, adică pentru fiecare obiect despre care se enunţă un concept, se poate indica în mod univoc un obiect, şi anume o valoare de adevăr.

Afirmaţia că valorile funcţiei numite concept sînt valori de adevăr poate fi justificată, spunînd că ceea ce se enunţă despre un obiect (despre un „subiect” în sens aristotelic) se enunţă în mod adevărat sau fals. Vorbind despre o funcţie, vorbim despre o *operaţie* matematică; a obţine valoarea unei funcţii pentru un argument înseamnă a efectua corect o serie de operaţii matematice. În mod analog, vorbind în logică despre funcţii avem în vedere operaţii logice; vorbind despre valorile funcţiei avem în vedere *rezultatul* operaţiilor logice. Ca funcţie logică, conceptul fregean presupune anumite operaţii; aplicarea lui la un argument înseamnă (iarăşi vorbind în limbajul logicii pre-matematiche) „a enunţa ceva despre ceva”.

Frege nu foloseşte acest limbaj al operaţiilor logice, dar vorbeşte în mod explicit despre „natura predicativă a conceptului”. El justifică altfel — pe o cale semantică, referindu-se la raportul

dintre semne, expresii, precum și entitățile care constituie sensul și în special semnificația expresiilor — alegerea valorilor de adevăr ca valori ale conceptelor pentru obiectele la care se aplică.

Ontologia implicită a lui Frege este astfel intim legată de semantica sa explicită.

— Am văzut că Frege consideră funcția ca fiind desemnată de o expresie „nesaturată“, „incompletă“; totodată, el admite tacit, în mod general, prin analogie cu ceea ce se petrece în limbajul matematic, că rezultatul completării expresiei „nesaturate“ desemnând o funcție cu numele propriu al unui argument *desemnează* valoarea funcției pentru respectivul argument și ca atare este *numele* acelei valori.

Urmează că dacă privim conceptele ca funcții, ca entități „nesaturate“, desemnate de expresiile predicative, „nesaturate“ și ele, rezultatul completării expresiei funcției cu numele unui obiect, adică îmbinarea unui predicat cu un subiect, desemnează valoarea funcției pentru acel obiect. Dar aceasta înseamnă că propoziția singulară care rezultă este și ea numele unui obiect. Și deci este „nume propriu“ (în accepția semanticii fregeene). Într-adevăr, potrivit lui Frege, orice propoziție are pe lângă sens („Sinn“) și o semnificație („Bedeutung“), adică desemnează ceva. Iar ceea ce desemnează este o valoare de adevăr, prin urmare un obiect. Ca atare, propoziția este un nume propriu, al Adevărului sau al Falsului.

Ar fi interesant de urmărit în amănunt această legătură între ontologia implicită și semantica explicită a lui Frege, unitatea lor organică fiind de netăgăduit. Oare, genetic vorbind, ontologia lui Frege va fi determinat trăsăturile fundamentale ale semanticii sale, printre care identificarea propozițiilor cu nume proprii având ca semnificație una sau alta dintre valorile de adevăr? Fapt este că ele se desfășoară concomitent, înăuntrul aceleiași concepții teoretice, iar Frege justifică definiția conceptului, pe de o parte, și concepția sa despre propoziții, pe de altă parte, prin rațiuni aparent independente.

Conceptele sînt funcții de la domeniul obiectelor la domeniul valorilor de adevăr.

În sens *larg*, conceptele sînt funcții care iau ca valori numai

valori de adevăr, numărul argumentelor putînd fi mai mare decît 1. Frege numește *relații* asemenea funcții de mai multe argumente; interes prezintă mai ales funcțiile de două argumente.

În sfîrșit, noțiunea de *funcție* admite altă generalizare, întrucît argumentul unei funcții poate fi și el o funcție, nu un obiect. Frege distinge între funcții de treapta unu care au ca argumente obiecte și funcții de treapta a doua care au ca argumente funcții de treapta unu.

Astfel înțeleasă, noțiunea matematică de funcție a devenit o idee pur logică. Funcțiile pe care le numim logice în sens mai restrîns sînt funcțiile asociate conectivelor logicii propozițiilor și cuantorilor din logica predicatelor, deci — în terminologia scolastică — asociate așa-numitelor „expresii sincategorematiche“.

Printre aceste funcții se numără și cea notată prin \neg ; valoarea ei coincide cu argumentul, atunci cînd acesta este o valoare de adevăr, și este Falsul, în cazul cînd argumentul este un orice alt obiect.

Negația se definește ca funcție care ia valoarea Adevăratul pentru orice argument pentru care funcția \neg are valoarea Fals, și are valoarea Falsul pentru orice argument pentru care funcția \neg ia valoarea Adevăratul.

Negația, afirmația, implicația și orice altă funcție avînd obiecte ca argumente sînt definite de Frege pentru *orice obiect*. Acest mod de a defini funcțiile logice este specific lui Frege; logica de astăzi a renunțat — a trebuit să renunțe, din cauza amenințării paradoxelor — la această ambițioasă generalizare logicistă.

Cuantorul existențial și cel universal sînt la rîndul lor funcții de treapta a doua.

Unul din rezultatele bizare ale concepției lui Frege după care funcțiile sînt peste tot definite și există un unic domeniu al obiectelor este că orice concept se poate enunța în mod adevărat sau fals despre orice obiect, indiferent de natura lui. Această consecință, pe care o putem deduce din ontologia și semantica lui Frege, are o alură paradoxală; mai adecvată la intuițiile noastre curente pare o modificare a teoriei fregeene în direcția unei „teorii a tipurilor“ pe care, deși Frege a respins-o cu anticipație în polemica sa împotriva lui Schröder, el însuși a pre-

gătit-o, involuntar, prin distincția sa între funcțiile de prima și a doua treaptă⁴⁰.



Teoria lui Frege asupra funcțiilor în general și a conceptului în special suscită unele dificultăți. Am văzut mai sus că orice funcție are caracteristica „incompletitudinii“, „nesaturării“. Conceptul are și el, funcție fiind, atributul funcției: este nesaturat, incomplet (pentru a folosi terminologia metaforică a lui Frege). Simbolul conceptului din limbajul formal, ca și termenul conceptual din limbajul obișnuit la rîndul lor sînt nesaturate, incomplete.

Sensul „nesaturării“ conceptului rezultă din afirmația lui Frege: „... Nu toate părțile unui gînd pot fi închise în sine; cel puțin una trebuie să fie nesaturată sau predicativă, altfel ele nu s-ar îmbina“⁴¹. Nesaturarea conceptului rezidă în chiar predicativitatea sa. Revenim pe un teren cunoscut, problema fiind aceea a predicativității conceptului. Nu se poate ignora faptul, trecut uneori cu vederea de comentatorii lui Frege⁴², că, deparle de a se abate de la problematica filosofică majoră a logicii, gîndirea lui Frege pune în mod foarte apropiat problemele care au fost

⁴⁰ Schröder a anticipat, în ale sale *Prelegeri de algebra logicii*, teoria tipurilor a lui Russell (vezi BOCHENSKI, *Formale Logik*, secțiunea 48 C; A. CHURCH, „Schröder's anticipation of the simple theory of types“, în „Erkenntnis“, 9, 1939, pp. 149—152; A. N. BIRIUKOV, *Prăbușirea concepției metafizice despre caracterul universal al domeniului obiectelor în logică*, Moscova, 1963). Limitarea „universului de discurs“ trebuie desigur concepută în două sensuri: 1. împărțirea „obiectelor“ în tipuri sau trepte diferite, ierarhizarea lor; 2. admiterea unei pluralități a „universurilor de discurs“, în funcție de materia tratată, adică de conținutul propozițiilor unei limbi, și deci admiterea unei pluralități de limbaje. Teoria tipurilor are în vedere primul sens. În cele de mai sus, am avut în vedere ambele sensuri.

⁴¹ FREGE, „Despre concept și obiect“, în vol. de față, pp. 304—305.

⁴² Vezi, de exemplu, MAX BLACK, „Frege on Functions“ (în *Problems of Analysis*, *Philosophical Essays*, Routledge & Kegan Paul, London, 1954), unde este comentat citatul de mai sus.

dezbătute în istoria logicii, înscriindu-se astfel în tradiția filosofică⁴³.

Un nume propriu *desemnează* un obiect; un termen conceptual *se enunță despre* un obiect. Nesaturarea, incompletitudinea conceptului exprimă tocmai acest „se enunță despre...”. Suportul enunțării — subiectul logic — este *presupus*, însă nu este totodată *spus* de către termenul conceptual. Ceea ce nu spune, dar presupune conceptul este *complinirea* sa, indicarea subiectului despre care se enunță.

Metoda nesaturării este revelatoare pentru una din fațetele filosofiei lui Frege; gânditorul german nu acordă subzistență autonomă conceptului și în același timp nu-i refuză obiectivitatea.

Deosebirea între obiect și concept este însă la fel de relativă ca și deosebirea dintre argument și funcție. Conceptul este la rîndul lui un obiect „sui-generis” și numai ca atare are proprietăți. Cînd admitem că o funcție are proprietăți, spunem implicit că funcția este și ea un obiect „sui-generis”. Mai trebuie observat de asemenea, ca explicație alternativă, că trecerea la o expresie care desemnează conceptul în calitate de obiect este totodată trecerea de la un nivel lingvistic la altul, sau trecerea de la limbaj la metalimbaj.

⁴³ Un exemplu este tot studiul de mai sus al lui Black. Iată ce spune el în privința problemei predicativității conceptului, problemă pe care nici nu o recunoaște ca atare. „Nume, predicate și alte expresii sînt abstracții din propoziții (sentences); chestiunea «Cum se îmbină ele?» («How do they hold together?») nu are mai mult sens ca aceea: «Cum se îmbină cărămizile și mortarul unui zid?»» (BLACK, *op. cit.*, p. 245). — Ce putem spune despre această afirmație? Am fi dezarmați dacă însăși metafora mortarului și cărămizilor nu ne-ar sugera răspunsul: problema „cum se îmbină părțile unei propoziții” are tot atîta sens ca și problema îmbinării materialelor de construcție. Unui zidar, mînuirea empirică a mistriei nu-i ridică vreo comandă teoretică: este doar evident, și practic verificabil că mortarul și cărămizile țin împreună. Lucrul acesta este evident, și zidarul nostru este astfel un spirit pozitiv. Unui inginer, unui specialist în materiale, în sfîrșit unui fizician, problema i se pare însă gravă și serioasă. Și pe drept cuvînt. La fel, problema îmbinării materialelor de construcție ale propoziției depășește nivelul pozitivității constructorului; este o problemă filosofică. Trebuie văzut ca un merit al lui Frege punerea unor probleme „evidente”.

Frege a șovăit în fața acestei concluzii, și de aceea nu a putut surmonta dificultățile teoriei sale logice.

Frege distinge între funcții de treapta unu, doi, trei, ... și argumente de tipul 1 (obiecte), de tipul doi (funcții de treapta unu sau de un singur argument), de tipul trei (funcții de treapta a doua de două argumente) ș.a.m.d.⁴⁴.

Însă — am mai spus — el nu completează ierarhizarea argumentelor pe tipuri și a funcțiilor pe trepte cu împărțirea obiectelor pe trepte. Dacă introducem o asemenea împărțire, putem admite că o funcție de treapta unu este totodată un obiect de treapta doi, însă expresia pentru o funcție de treapta unu *qua* funcție va fi diferită de expresia pentru aceeași entitate luată ca obiect. Această diferență, și chiar incompatibilitate, a modurilor de notație se explică prin faptul că funcția este funcție numai față de argumentele sale, însă față de proprietățile sale este obiect. Ne trebuie deci o expresie pentru funcția ca funcție și o altă expresie pentru funcția ca argument. Funcția este nesaturată față de argumentele sale, însă nu față de proprietățile sale.

Soluția nu se rezumă deci la ierarhizarea expresiilor și a entităților desemnate de expresii, ci presupune și o explicație corespunzătoare din punct de vedere filosofic.

Un element „metafizic” în sistemul lui Frege rezidă — după părerea noastră — în absolutizarea noțiunii de obiect. Frege a recunoscut pe jumătate dificultatea — spunând că este vorba de o „stângăcie” a limbii obișnuite — și a remediat-o numai pe jumătate, admitând că o funcție poate fi argumentul altei funcții. Însă inadvertența limbii obișnuite transpare și în limbajul formal, unde avem două notații: una desemnând funcția *ca* argument și alta desemnând funcția *ca* funcție *pentru* argument; soluția radicală — după părerea noastră — o constituie teoria tipurilor, interpretată filosofic în mod corespunzător. Această interpretare ne explică de ce avem două notații — una pentru funcție *ca* argument al altei funcții și alta pentru funcție *ca* aplicată efectiv la argumentele sale.

Dar, pe de altă parte, se poate trage o concluzie deloc surprinzătoare, și asupra determinațiilor logico-filosofice: *relativitatea*

⁴⁴ FRIEGE, *Grundgesetze der Arithmetik*, Erster Band, p. 40.

distincției între proprietate, obiect și relație. Proprietatea este un obiect (abstract, ideal); obiectul este substratul proprietăților sale și este obiect față de proprietățile sale; relația, de asemenea, are proprietăți și este obiect în raport cu proprietățile care îi revin. însă este relație față de obiectele între care există relația, fiind totodată o proprietate a fiecărei perechi ordonate de argumente între care ființează etc. Pe de altă parte, obiectele la nivelul de bază apar numai ca obiecte, adică *nu sînt* proprietăți, ci *cu* proprietăți, nu sînt relații, ci intră în relații.

Sub raport logico-lingvistic, relativitatea nu se manifestă în mod nemijlocit, ci numai prin separarea determinărilor opuse și repartizarea lor asupra unor expresii diferite. Limba are proprietatea de a transforma în „lucruri“ deosebite deosebirile coexistente; limba substanțializează funcțiile diferite ale unei aceleiași entități. Așa se face că deși un concept este *în sine* obiect (=cade sub alte concepte), expresia pentru conceptul *qua* concept este diferită de expresia pentru conceptul *qua* obiect. Aceeași *expresie* nu poate desemna și o funcție și un argument deși este posibil ca ceea ce este desemnat să devină argument — într-un raport — sau funcție într-un alt raport. Sursa dificultăților rezidă așadar în transpunerea situației de pe planul expresiei pe planul semnificației.



Nu va fi de prisos să amintim că unele distincții făcute de Frege pot fi regăsite în altă ipostază la Aristotel⁴⁵. Firește, distincția nu o găsim pusă în aceeași termeni; pe de altă parte, diferența dintre concepțiile lui Frege și Aristotel este departe

⁴⁵ A se vedea articolul nostru „Însemnări despre ontologia lui Frege“ (în „Revista de filozofie“, nr. 1, 1968, pp. 55—67, îndeosebi pp. 66—67), unde relevam posibilitatea unui paralelism între ontologia lui Frege și cea a *Categoriilor* lui Aristotel. În „Studies on Gottlob Frege and Traditional Philosophy“ (D. Reidel, 1967), Ignacio Angelelli dezvoltă amplu un punct de vedere analog, raportînd ontologia lui Frege la ontologiile lui Aristotel și ale altor filosofi. Succintele considerații din paginile de mai jos se întîlnesc cu exegeza mult mai bogată întreprinsă de către Angelelli.

de a fi numai terminologică. În fapt, avem de-a face cu teorii radical diferite. Frege nu este un aristotelic, dar în anumite privințe concepțiile lui pot fi privite ca o dezvoltare a celor aristotelice. Pe de altă parte, „microscopul logic” despre care vorbea Frege în *Begriffsschrift* ne permite a desluși sensul unor idei dificile și a reactualiza teme aristotelice.

❧ Dacă deschidem *Categoriile*, sîntem întîmpinați încă de la prima frază de distincția între nume și logos. „Se cheamă omonime lucrurile care, deși au același nume, diferă în noțiunea corespunzătoare numelui”⁴⁶. Deci: expresii (onoma), lucrurile ce primesc nume și în sfîrșit „noțiunea corespunzătoare numelui”, „logosul numelui”. Sînt trei planuri distincte; în aceste planuri se înscrie și teoria logică a lui Aristotel și teoria logică a lui Frege (În ceea ce privește „stările sufletești”, potrivit lui Aristotel, ca și lui Frege, „ele aparțin unei cercetări deosebite de aceea care ne preocupă acum”)⁴⁷.

În al doilea capitol al *Categoriilor* ajungem la distincția care ne interesează. Cele ce sînt rostite dar totodată și cele ce sînt — sînt împărțite în patru clase:

- a) unele sînt enunțate despre un anumit subiect dar nu sînt în nici un subiect;
- b) altele sînt în subiect, dar nu se enunță despre subiect;
- c) altele se enunță despre un subiect și sînt într-un subiect;
- d) altele însă nu sînt într-un subiect și nici nu sînt enunțate despre un subiect⁴⁸;

Cele din prima clasă corespund într-un fel *conceptelor* lui Frege, și anume conceptelor de treapta unu, avînd un singur argument. În general, conceptele de treapta unu au proprietatea de a se enunța despre un anumit subiect și totodată „nu sînt în nici un subiect”, în accepția conferită de Stagirit acestei expresii. Într-adevăr, Aristotel spune că „prin a fi într-un subiect, nu înțeleg a fi cum sînt părțile într-un întreg, ci a nu putea să existe în afară de subiectul în care este”⁴⁹.

⁴⁶ *Categoriile*, 1, 1 a (trad. română, Editura Științifică).

⁴⁷ *Despre interpretare*, I, 16 a.

⁴⁸ *Categoriile*, 2, 1 a—b.

⁴⁹ *Categoriile*, 2, 1 a.

Cele din ultima clasă — cele ce nu sînt într-un subiect și nici nu sînt enunțate despre un subiect — sînt lucrurile individuale, sensibile. Nu numai un ce anumit, individual, dar totodată un ce sensibil, o „substanță primă“ (termenul îl vom întîlni abia în capitolul următor al *Categoriilor*). Toate entitățile din ultima clasă sînt subiecte, însă nu orice subiect aparține acestei clase.

Cele din a doua clasă nu se enunță despre un subiect, dar sînt într-un subiect. Să observăm însă că despre ele se poate enunța ceva. Ele sînt subiecte individuale. În adevăr, subiect individual este tot ce suportă o enunțare și nu se poate la rîndul său enunța.

Prin urmare, clasele b) și d) cuprind obiectele individuale, dar nu numai pe cele sensibile, ci orice „are un caracter de unitate“, orice este individual și nu se enunță despre un subiect. Dar în acest caz, noțiunea de *subiect individual* corespunde noțiunii de *obiect* la Frege (Frege admițînd un unic domeniu al obiectelor, pe care sînt definite toate funcțiile de treapta unu; printre aceste obiecte se numără și obiectele ideale, care nu cad sub simțuri: valorile de adevăr, numerele, „parcursurile valorice“, sau, de pildă, „o anumită cunoștință gramaticală“, ca să reluăm exemplul propus de către Aristotel).

Concepția lui Frege permite o *generalizare*, distincția dintre concept și obiect fiind un caz particular al distincției fundamentale dintre funcții și entitățile care nu sînt funcții dar există corelativ la funcții, adică posibile argumente. Întreaga problemă *logico-filosofică* este reluată pe un plan mai general. Printre altele, interesează nu numai cum este posibil a enunța ceva despre ceva (problema tradițională a predicăției), ci și cum este posibil a enunța o relație. Cum sînt posibile, care este esența funcțiilor în general?

Disputa tradițională a universalelor se duce, în fond, în jurul problemei existenței proprietăților și relațiilor, precum și a „obiectelor ideale“; disputa contemporană este mai generală, ea angajînd și răspunsul la problema *operațiilor*. Într-adevăr, vorbind despre funcții vorbim implicit și despre operații; mai întîi în sens larg, deoarece în sens larg funcția este o operație; apoi într-un sens mai restrîns, căci alături de funcții care iau ca valori numai valorile de adevăr — concepte și relații — există funcții

care iau și alte obiecte ca valori; pe acestea din urmă le numim *operații* (de ex.: adunarea, scăderea, funcția *sin x*, funcția *tatăl lui x* etc.), deosebindu-le de atribute (relații și proprietăți).



Combătînd „logica psihologică“, Frege a reliefat obiectivitatea gîndului și faptul că logica are ca obiect adevărul.

Logica lui Frege nu este o logică a corectitudinii decît în mod secund; în mod primordial, ea este o logică a adevărului. Mai exact, o logică a legilor adevărului.

Frege nu se limitează la a sublinia latura obiectivă a logicii; el sugerează și explică pe această bază legătura legilor logicii cu activitatea de cunoaștere.

În sens restrîns, logica este un ansamblu de legi și de definiții ale termenilor *sincategorematici*, legile ei se formulează prin intermediul unor variabile (semne care indică în mod indefinit entități de un fel sau altul) și al unor expresii sincategorematice (expresii logice care nu au semnificație izolat, dar aduc o contribuție indispensabilă la construcția și semnificația termenilor și propozițiilor). Termenii sincategorematici folosiți de Frege sînt: implicația, negația și cuantorul ~~universal~~ (denumirile moderne de aici nu coincid cu cele utilizate de Frege); alți termeni sincategorematici se definesc pe baza acestora. Frege nu vorbește despre sincategoreme, ci despre linia negației, semnul identității, linia condiționalului etc. Toate aceste semne desemnează însă concepte sau alte funcții. Astfel, logica lui Frege este o teorie a funcțiilor. Cele mai multe dintre aceste semne — în fapt, toate semnele primitive — semnifică *concepte*. În acest sens, logica lui Frege este o teorie a conceptelor. Însă Frege dezvoltă cu insistență ideea că punctul de pornire al logicii este adevărul, iar prin aceasta este gîndul, posibilul conținut de judecată, exprimabil în propoziție. La concept și obiect ca abstracții separate ajungem prin analiza logică a propozițiilor, prin desprinderea expresiilor componente și corelarea lor cu entități extralingvistice și extramentale. În acest sens, logica lui Frege este primordial a adevărului și gîndului, este o logică propozițională sau, și mai bine, judicațională.

Prin gând, Frege nu înțelege ceea ce este gândit de cineva. Legile logicii, potrivit lui Frege, se referă la gânduri, la conținuturi inteligibile, la conținuturi care pot deveni materialul gândirii și, odată asertate, sint judecați. Este o diferență între *a fi* pentru gândire și *a putea fi* pentru gândire. *Gîndul*, la Frege, poate fi al gândirii, poate fi înțeles, cuprins, exprimat etc., însă el are o existență antediluviană. Contestînd faptul că legile logicii sint legi ale gândirii, Frege admite implicit că gîndirea este o activitate mundană, un proces temporal, psihic și neagă implicit că există o gîndire antediluviană.

Legile logicii sînt atemporale. Ele se referă la obiecte și la gînduri. (Prin gînd nu se înțelege gîndul cuiva, ci ceea ce este adevărat sau fals).

Un pasaj din *Grundgesetze der Arithmetik* ilustrează această concepție: „Cum se formulează, de fapt, principiul identității? Oare astfel: «Oamenilor le este imposibil în anul 1893 să recunoască un obiect ca diferit de sine însuși»? Sau: «Orice obiect este identic cu sine însuși»? Prima lege tratează despre oameni și conține o determinare temporală, în cealaltă nu este vorba nici despre oameni, nici despre timp. Ultima este o lege a ființării adevărate (ein Gesetz des Wahrseins), prima este o lege privitor la ceea ce oamenii consideră adevărat (Gesetz des menschlichen Fürwahrhaltens). Conținutul ei este cu totul diferit și legile sînt independente una față de alta, astfel că nici una dintre ele nu poate fi inferată din cealaltă⁵⁰.

Consecința concepției lui Frege este transformarea logicii într-o teorie a unor entități obiective, existente independent de conștiință, de gîndire, într-o teorie a obiectelor și funcțiilor, teorie formală și de valabilitate generală.

Frege nu a vorbit vreodată despre vreo „ontologie formală” dar, implicit, fiind o logică a obiectului, conceptului și relației, logica sa este o asemenea ontologie, o teorie a existențelor obiective.

În legătură cu această *ontologie formală* se pot scoate în relief cîteva caracteristici esențiale:

1. Sistemul lui Frege nu se confundă cu *concepția filosofică* a lui Frege și, într-un anumit sens, este independentă de ea. De

⁵⁰ *Grundgesetze der Arithmetik*, I, p. XVII.

exemplu, Frege are o anumită concepție asupra obiectelor și conceptelor; ea are un caracter metalogic, nefiind formalizată în cadrul sistemului. Nu există, de pildă, o formulă a sistemului care, interpretată, să vorbească despre caracterul „nesaturat“, „incomplet“ al funcției, deși, pe de altă parte, *orice formulă arată* acest caracter al funcției.

2. Sistemul lui Frege este un sistem *semantic*, adică însoțit de o interpretare. Semnificația și sensul formulelor sînt stabilite pe baza unor principii și reguli sintactice, semantice și pragmatice.

Dacă legile logicii nu sînt legi ale gîndirii, există totuși o legătură între aceste legi și activitatea de cunoaștere, de gîndire, a omului?

Frege vorbește în termeni privind entități obiective, dar aceasta nu înseamnă că logica sa nu are semnificație noetică. Aristotel — se poate aminti acest lucru — a evitat, în logica sa, să vorbească despre „stările sufletești“, despre ideile *subiective* ale omului. Limbajul silogisticii sale este, în mod precumpănitor, un limbaj al entităților obiective; termenii generali pe care îi indică în mod nedefinit variabilele logicii sale sînt, — potrivit Stagiritului — „cele ce se enunță despre subiect dar nu sînt în nici un subiect“ (și deci nici în suflet). Silogismele sale nu sînt prescripții (reguli care asigură corectitudinea unui act de gîndire), ci legi ale adevărului *ființei*. Nu mai puțin însă, silogistica lui Aristotel are și o semnificație noetică. Același este cazul și cu Frege.

Pe de altă parte, ontologia lui Frege este *incompletă* și *schematică*, construită astfel încît să corespundă cerințelor logicii, înțeleasă în sens noetic. *Incompletă*, pentru că nu este o teorie generală a existenței, un sistem atotcuprinzător; este o teorie a obiectelor, proprietăților și relațiilor, dar nu o teorie a raportului dintre conștiință și existență, a cauzalității, a spațiului și timpului, a mișcării, a formei și conținutului, fenomenului și esenței etc. În acest sens, ontologia lui Frege este un *fragment*, însă un fragment relativ autonom. *Schematică*, pentru că nu își propune să epuizeze caracteristicile generale ale categoriilor filosofice: obiect-proprietate-relație. Conceptul reține unele trăsături generale ale *proprietăților* și *relațiilor*, face însă abstracție de alte trăsături generale. O asemenea *abstragere* constituie fie o *presupo-*

ziție, fie, mai curînd, o limitare a logicii fregeene. De exemplu, se face abstracție de caracterul *variabil* al unor proprietăți, de variația lor intensivă și extensivă, de „mai multul” și „mai puținul” lor, de deosebirea între proprietate continuă și proprietate discretă etc. Toate proprietățile și relațiile dintre obiectele nelingvistice sînt privite după chipul și asemănarea proprietăților și relațiilor pe care le au expresiile lingvistice. Numai astfel conceptul ajunge să se identifice cu atributul unei clase de obiecte.

La fel, admiterea conceptelor (proprietăților) vede, adică a proprietăților și relațiilor sub care nu cade nici un obiect sau nici un cuplu de obiecte contrazice ontologia „materială”. În mod obișnuit, proprietatea revine cel puțin unui obiect; o proprietate care nu revine nici unui obiect — sau cel puțin o proprietate care nu poate reveni (întrucît contrazice legile logicii sau ale științelor naturii) nici unui obiect, este considerată de obicei — de „bunul-simț”, dar și de filosofia bunului-simț, drept o ficțiune. Logica formală admite însă fără reticențe o asemenea proprietate (concept).

Exemplele s-ar putea înmulți.

Dacă deci logica lui Frege, înțeleasă ca ontologie, este incompletă și schematică, aceste caractere vin să răspundă tocmai funcțiunii sale noetice.

Pînă acum a fost vorba despre logică *în sens restrîns*; în acest sens, logica lui Frege nu are o semnificație noetică nemijlocită. Tot astfel, sistemul formal al silogisticii aristotelice, calculul claselor al lui Boole și orice alt sistem logic pot fi privite în perspectivă ontologică, ca teorii ale unor entități obiective. Motivul l-am amintit: legile logicii sînt *universal valabile, atemporale*, independente de gîndirea umană, independente de existența concretă și de funcționarea gîndirii. Ele sînt comparabile cu legile aritmeticii, care au o valabilitate universală, nefiind însă nici legi ale naturii, nici legi sociale, nici legi ale gîndirii.

Gîndirea poate încălca legile logicii sau legile aritmeticii, dar nu poate „încălca” legile psihicului — normal sau patologic —, ceea ce sugerează că legile logicii sau aritmeticii nu stau în același raport de inerență față de gîndire ca legile psihologiei, sau în raportul în care legile logicii și aritmeticii stau față de obiecte, concepte, valori de adevăr sau numere.

Gîndirea, cum se ştie, nu poate încălca vreo lege logică, ci numai o cerinţă, o normă ce derivă din respectiva lege. Cu alte cuvinte, o regulă, care nu trebuie confundată cu o lege logică, dar se justifică în temeiul legilor logicii.

Frege constată că legile logicii nu sînt o descripţie naturalistă a gîndirii, nu sînt legi ale gîndirii; totodată, el pune în evidenţă caracterul *prescriptiv* al *regulilor* ce derivă din legile logicii.

Dacă logica este înţeleasă în *sens lărgit*, ca un ansamblu de reguli a căror aplicare vizează obţinerea anumitor rezultate — corectitudinea fiind o condiţie a adevărului —, atunci nu se poate contesta legătura logicii cu gîndirea reală a omului. Nici Frege nu contestă, în acest sens larg, legătura logicii cu gîndirea. El urmăreşte să arate că legile logicii nu se referă la gîndirile oamenilor, ci la conţinutul obiectiv al acestor gîndiri, conţinut obiectiv, ideal, a cărui realitate nu depinde de conştiinţa umană. Acest conţinut este numit *gînd* (Gedanke).

Legile logice, pentru Frege, nu sînt legi ale *activităţii* gîndirii, ci ale *conţinutului* ei, în măsura în care reprezentările nu intră în joc, ci intră *gîndurile*.

Despre actul judecării, judecarea, Frege scria că, în conformitate cu concepţia prezentată, „ $5 > 4$ ” şi „ $1 + 3 = 5$ ” ne dau numai expresii ale valorilor de adevăr, fără ca astfel să se facă vreo aserţiune. Această separare a judecării (Urteilen) de cele asupra căroră se judecă apare indispensabilă, întrucît altfel nu s-ar putea exprima o simplă supoziţie, punerea unui caz, fără a judeca de asemenea asupra felului cum apare. Este nevoie, prin urmare, de un semn special, pentru a putea aserta ceva⁵¹.

Pasajul citat este concludent pentru modul în care Frege înţelege conexiunea dintre propoziţii („expresii ale valorilor de adevăr”), gînd (= sens al unei propoziţii, conţinut obiectiv corelat Adevăratului sau Falsului) şi judecare (= act de gîndire constînd în recunoaşterea adevărului unui gînd, în asertarea lui).

În sensul larg, logica include şi metalogica; alături de sintaxă şi semantică intră în joc pragmatica logică, o teorie a relaţiilor dintre limbaj, conţinuturi şi subiectul care foloseşte limbajul şi

⁵¹ „Funcţie şi obiect” (în volumul de faţă, p. 261).

efectuează diferite operații logice: *înțelege* gândurile, *judecă*, adică recunoaște adevărul lor, le *exprimă* ș.a.m.d. Vorbind despre obiectul și conținutul logicii, Frege avea în vedere logica în sens restrâns. Frege este creatorul semanticii logice și, în același timp, în concepția sa filosofică semantica se îmbină în mod spontan cu elemente de *pragmatică logică*. Spre sfârșitul vieții sale, în special în articolul „Der Gedanke” („Gîndul”), Frege dezvoltă următoarea distincție, formulată de altfel și în lucrări anterioare:

Într-o propoziție declarativă „... trebuie să fie deosebite două elemente: conținutul, care este comun și respectivei propoziții interogative (Satzfrage), precum și asertarea (Behauptung). Primul este gîndul, sau cel puțin cuprinde gîndul. Astfel, este posibil să exprimăm gîndul fără a-l pune ca adevărat. Ambele sînt atît de strîns legate într-o propoziție declarativă, încît este lesne să trecem cu vederea separabilitatea lor. În consecință, putem distinge:

- (1) înțelegerea unui gînd — conceperea;
- (2) recunoașterea adevărului unui gînd — judecata;
[Într-o notă, Frege adaugă: „Mi se pare că gîndul și judecata nu au fost deosebite în mod adecvat pînă acum”].
- (3) manifestarea acestei judecăți — asertarea.

Noi efectuăm primul act atunci cînd formăm o propoziție interogativă...⁵².

Distincția, cum se vede, aparține *pragmaticii logice*: în ea este vorba și despre propoziții, și despre gînduri, și despre activități umane. Este vorba, mai precis, despre conexiunea lor.

În logica tradițională, logica și metalogica (inclusiv semiotica) se împletesc într-un mod indistinct. În viziunea modernă, logica și metalogica sînt distincte, însă aflate într-o conexiune specifică. Metalogica ar fi lipsită de obiect, dacă nu ar exista logica; pe de altă parte, logica presupune metalogica, metalogica este, ca să spunem așa, „mediul de scufundare” al logicii.

Poziția lui Frege, după care legile logicii au un caracter obiectiv, ultrageneral, ca legi ale oricărui conținut și nu ca legi ale

⁵² „Der Gedanke”, citat după volumul „*Kleine Schriften*”, 1969, p. 346.

gîndirii subiective, este destul de convingătoare. Ea evită — la Frege — hipostazierile platonice. Concepția lui Frege despre logică apără obiectivitatea legilor logicii fără să ignore legătura dintre gînd, gîndire și limbă. Pentru Frege, conceptelor le corespund proprietăți și relații care nu au aceeași independență, aceeași subzistență autonomă pe care o au obiectele.

Frege nu face nici o diferență între gîndul exprimat de o propoziție (de exemplu, „zăpada este albă“) și *factul* corespunzător ca zăpada este albă. Sensurile propozițiilor sînt identificate cu stări de lucruri, fapte care au loc sau nu au loc (în care cazuri gîndul este adevărat, respectiv fals). Identificarea nu vizează existența unei lumi platonice *anterioare* realității concrete, ci desprinde un domeniu al realității diferit de cel al obiectelor materiale, diferit și de lumea reprezentărilor subiective.

Implicațiile platonice ale concepției fregeene sînt totuși incontestabile. Cea mai importantă ni se pare următoarea. Frege nu face o distincție de domeniu între obiectele materiale, care au realitate și obiecte „ideale“, cum sînt: numerele, punctele geometrice, valorile de adevăr, extensiunile conceptelor. Ele aparțin toate aceluiași domeniu. Caracterul obiectului este de a fi „complet“, „saturat“, spre deosebire de caracterul „nesaturat“ al conceptului. — Pe de altă parte, Frege afirmă (vezi, de ex. „Die Grundlagen der Geometrie“) că un concept poate fi numai distins, însă nu și separat în mod efectiv; prin aceasta tocmai se deosebește un concept de un obiect. Există însă obiecte predeterminate prin concepte despre care ar trebui de asemenea să spunem că pot fi „distinse“ logico-gramatical, însă nu efectiv separate din nexul faptelor. De exemplu, extensiunea conceptului, după cum spune Frege „este constituită, în ființa ei, nu de indivizi, ci de însuși conceptul; adică de ceea ce este afirmat despre un obiect atunci cînd acesta este adus sub un concept“⁵³; „... clasele sînt determinate de proprietățile pe care le au indivizii din cadrul lor“⁵⁴. Proprietățile — respectiv conceptele — determină deci

⁵³ FREGE, „Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröders Vorlesungen über die Algebra der Logik“, „Arch. f. syst. Philosophie“, 1 (1895), p. 451.

⁵⁴ *Ibidem*, pp. 452—453.

obiecte dar nu obiecte obișnuite. Dacă distincția între entități „saturate” și „nesaturate” este efectivă și independentă de limbaj, dacă ea depășește cadrul distincției analoge în rîndul expresiilor care le desemnează — cum crede Frege —, atunci se impune o distincție între caracterul saturat al obiectelor obișnuite și caracterul *ideal* al unor obiecte, printre care extensiunile conceptelor. Pe de altă parte, distincția între entități saturate și nesaturate nu poate avea caracterul absolut pe care i-o atribuie Frege, iar „obiectele ideale” nu pot avea același statut ontologic ca obiectele propriu-zise. Nerecunoașterea acestei distincții este — în ultimă instanță — responsabilă de paradoxul ivit în sistemul formal al lui Frege și implică o concepție platonice.



Nu ne-am propus, în acest studiu introductiv, să facem o expunere și o tratare cu caracter exhaustiv a problemelor pe care le cuprinde vasta și profunda operă a lui Gottlob Frege.

De la Aristotel și pînă azi nici un logician nu a făcut descoperiri atît de numeroase și importante, acoperind o arie atît de vastă, ca Gottlob Frege. Opera sa are un caracter demiurgic; rigoarea metodei sale nu a fost egalată de contemporanii săi, ea rămînînd și astăzi surprinzătoare.

O înnoire profundă în matematică și logică a adus-o teoria sa despre *funcții*. Noțiunea de funcție logică este astăzi o piatră unghiulară la ~~construc~~ciul logicii moderne.

Frege este întemeietorul semanticii logice, autorul unei teorii semantice încheiate și subtile, la baza căreia stă distincția dintre semnificația și sensul expresiilor⁵⁵. Întreaga semantică modernă pornește de la Frege, preluîndu-l, întregindu-l sau negîndu-l.

⁵⁵ Pentru o expunere sistematică a semanticii lui Frege, a se vedea îndeosebi M. și W. KNEALE, *Dezvoltarea logicii*, vol. II, cap. VIII, 2 (Ed. Dacia, 1975, pp. 124—134); RUDOLF CARNAP, *Semnificație și necesitate*, cap. III, § 28 (Ed. Dacia, 1972, pp. 169—176); A. CHURCH, din *Introducere în logica matematică* (în volumul „Logică și filozofie”, Ed. Politică, 1966, pp. 144—196) și GH. ENESCU, „Semantica logică”, în culegerea „Limbaj, logică, filozofie”.

Frege a propus primul sistem formal al aritmeticii. Sistemul său — formal și axiomatic — cuprinde ca subsisteme logica propozițiilor și logica predicatelor. Frege a introdus în logică axiomatizarea. El este părintele metodei logistice, metoda construirii sistemelor formalizate.

Frege este principalul promotor al programului logicist de deducere a adevărurilor aritmeticii din legile logicii și de definire a ideilor matematice prin intermediul unor concepte logice.

Sistemul lui Frege cuprinde însă contradicții; paradoxele semnalizează altceva decât un simplu viciu de construcție, remediabil prin amendamente mai mult sau mai puțin neesențiale. Presuposițiile cele mai adânci ale sistemului sînt ele însele puse în cauză. Frege a sugerat o soluție a paradoxului descoperit de Russell — cu care prilej a intuit și alte soluții care au fost date de alții (chiar teoria tipurilor, apoi limitarea acțiunii legii terțiului exclus) — dar propria sa soluție nu a putut salva sistemul. Sistemul lui Frege își păstrează însemnătatea istorică. Bogăția și noutatea problematicei, precum și reușita majoră în complicațiile probleme legate de formalizarea logicii și dezvoltarea ei, apoi de formalizarea aritmeticii, de justificarea ei fac din sistemul formal fregean una din creațiile monumentale ale gândirii științifice.

Logicismul lui Frege — program de fundamentare a matematicii — s-a dovedit irealizabil. El împărtășește astfel soarta altor curente din fundamentele matematicii care au încercat ceva mai târziu — cu succes parțial — să îndeplinească ceea ce acesta nu a reușit. Logicismul are propriile limite, eșuează ca program absolutist, însă în același timp contribuie la relevarea bazelor logice ale edificiului matematic. Deși adevărurile matematicii nu au putut fi fondate pe adevăruri logice (în speță, „axioma infinitului“, pe care Russell s-a văzut nevoit s-o introducă, nu constituie un adevăr logic, adică un adevăr al „tuturor lumilor posibile“) rămîne incontestabil faptul că matematica este formulabilă integral într-un limbaj logic.

Logicismul a jucat un rol incontestabil pozitiv în dezvoltarea logicii însăși.

Dramatismul ascuns de care este impregnată cariera științifică a lui Frege și care capătă din cînd în cînd (de exemplu, în

scrisorile lui Frege către Russell și în „Postfața“ la al doilea volum din *Grundgesetze der Arithmetik*) accente personale, are mai multe surse: *caracterul polemic*, critic al operei lui Frege; izolarea sa în epocă, datorită orientării sale filosofice, neînțelegerii contemporanilor; dar îndeosebi faptul că Frege a creat la hotarul a două epoci.

Cu Frege și ~~Cantor~~ începe nu numai o nouă etapă în istoria logicii, ci și o anumită criză a logicii și fundamentelor matematicii. Rezultatul crizei este înțelegerea treptată a precarității, a caracterului provizoriu și relativ al oricărei soluții. Frege a asistat la începutul acestui proces și a resimțit dureros consecințele. Considerentele filosofice subiacente operei lui Frege, convingerile care au avut un rol euristic primordial în structurarea concepției sale logico-matematice au fost dezmințite. Este vorba în primul rând despre convingerea lui Frege că legile logicii sînt universale, absolute, nelimitate de condiții de aplicabilitate; convingerea că logica este necondiționat una singură; că există un unic „univers al discursului“, deci al obiectelor; că adevărul și falsul sînt obiecte indefinibile; că justețea unui demers (logicismul) exclude justețea și fecunditatea altor demersuri (de exemplu, formalismul). Idealul lui Frege este esențialmente clasic: a da o teorie unică și atotcuprinzătoare a logicii și a matematicii, teorie care ar exclude ca eronate orice alte teorii. Unitatea logicii este însă o unitate în varietate, o unitate a sistemelor care pornesc de la presupuziții diferite; bănuim astăzi că logica are fundamente mai adînci. Punctele de vedere din fundamentele matematicii — logicismul, formalismul, intuiționismul ș.a. — sînt complementare; ele coexistă și conlucrează. Analog, în plan metalogic, teoriile semantice sînt privite astăzi ca tot atîtea metode de analiză; ca atare, coexistența lor nu surprinde. În semantica de astăzi avem, de exemplu, mai multe teorii asupra descripțiilor. Fiecare din aceste teorii are limitele sale, punctele sale tari, punctele sale slabe.

Această perspectivă relativistă, inerentă științei contemporane, nu ne condamnă totuși la scepticism. Puține perioade din istoria logicii au înregistrat rezultate atît de bogate și durabile ca logica din ultimul secol.

„Farmecul aritmeticii — a scris cîndva Frege — rezidă în

raționalitatea ei". Prin excelență raționalistă, creația lui Frege în fundamente, logică și filosofie este impregnată de acest farmec; ea aruncă punți solide între disciplinele formale și gândul filosofic. Rigoarea și bogăția euristică își regăsesc unitatea. Opera fregeană stă sub semnul universalității.

SORIN VIERU

NOTĂ

asupra ediției

Volumul pe care cititorul de limbă română îl poate deschide astăzi este primul pas în direcția unei ediții mai cuprinzătoare de traduceri din opera marelui Frege.

Pînă în prezent, un singur articol al lui Frege a fost tîlmăcit în românește, și anume „Despre sens și semnificație” (în antologia „Logică și filozofie”, apărută sub îngrijirea lui M. Tîrnoveanu și Gh. Enescu la Editura Politică, 1966, pp. 54—79). În antologia comentată *Fundamentele matematicii* de Oskar Becker (în românește de Alexandru Giuculescu, cu o prefață de Corneliu Vilt; Ed. Științifică, 1969) sînt incluse §§ 6, 62—65, 68 din *Grundlagen der Arithmetik*.

În afara acestor două traduceri, se pare că nu mai avem altceva de semnalat.

În schimb, sînt de semnalat cîteva articole și capitole dedicate operei fregeene, așa cum se răsfrînge ea în literatura logică românească, precum și cîteva scrieri de logică și fundamente traduse din alte limbi, pe care cititorul lui Frege le poate consulta în contextul lecturilor sale prilejuite de volumul de față.

Din prima categorie, a încercărilor de prezentare și comentare a creației lui Frege în literatura logică din țara noastră, cităm: — *Cornel Popa*, „Teoria definiției la Frege” („Revista de filozofie”, 15, 1, 1968, pp. 45—53).

— *Sorin Vieru*, „Insemnări despre ontologia lui Frege” („Revista de filozofie”, 15, 1, 1968, pp. 55—67);

— *Cornel Popa*, „Analiza limbajului la Leibniz, Boole și Frege” (în culegerea „Limbaj, logică, filozofie”, Ed. Științifică, 1968, pp. 86—157; a se vedea îndeosebi secțiunea 3, intitulată „Limbajul artificial la Gottlob Frege”, pp. 112—155);

— *Gh. Enescu*, „Semantica logică” (în culegerea susmenționată pp. 158—212; a se vedea îndeosebi secțiunea 5, „Teoria semantică a lui Gottlob Frege”, pp. 170—177);

— *Anton Dumitriu*, *Istoria logicii* (Ed. didactică și pedagogică, 1969); vezi cap. XL: „Gottlob Frege”, pp. 740—752).

— Călin Candiescu, „Predicație și cunoaștere la Gottlob Frege (kantianism și platonism)” („Revisa de filozofie”, 20, 12, 1973, pp. 1521—1535).

Aceste referințe nu sînt exhaustive.

Dintre traduceri, semnalăm îndeosebi:

— William Kneale și Martha Kneale, *Dezvoltarea logicii*, vol. 2, Ed. Dacia, 1975 (a se vedea îndeosebi cap. VII — *Numere, mulțimi și șiruri*; cap. VIII — *Logica generală a lui Frege*, pp. 64—144, op. cit.). Nu se poate recomanda îndeajuns această istorie, într-adevăr remarcabilă, a logicii pentru o bună documentare în opera fregeană. Monumentala sinteză a soților Kneale este structurată în ansamblul ei pe aprecierea creației lui Frege ca momentul cel mai important din perioada modernă a logicii.

— Rudolf Carnap, *Semnificație și necesitate*. Un studiu de semantică și logică modală (Ed. Dacia, 1972; vezi în special cap. III — „Metoda relației de denumire”, pp. 145—196);

— A. Church, Din „Introducere în logica matematică” (în culegerea „Logică și filozofie”, 1966, pp. 144—197);

— J. Łukasiewicz, „Din istoria logicii propozițiilor” (în culegerea susmenționată, pp. 119—143).

— Stephan Körner, *Introducere în filozofia matematicii* (Ed. Științifică, 1965); cf. capitolele II—V, pp. 42—156).

— Wang Hao, *Studii de logică matematică* (Ed. Științifică, 1972; cf. îndeosebi cap. IV, „Axiomatizarea aritmeticii”, în op. cit., pp. 74—86 și secțiunea 6 a cap. XVI — „Sistemele lui Ackermann și Frege”, pp. 401—409).

Nici aceste referințe nu sînt exhaustive.



Pentru traducerea *Fundamentelor aritmeticii* am utilizat volumul *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, ed. 1961, G. Olms in Hildesheim; am consultat totodată, reținînd unele sugestii de traducere, versiunea engleză a lui J. Austin, *The Foundations of Arithmetic* (Oxford, Blackwell and Mott, 1953; ediție bilingvă).

Pentru traducerea celorlalte trei articole incluse în culegerea de față am utilizat culegerea de articole G. Frege: *Funktion, Begriff, Bedeutung: Fünf logische Studien* editată de G. Patzig,

Göttingen: Vandenhoeck Ruprecht, 1962 și *Kleine Schriften*, ed. I. Angelelli (Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1967). Am consultat totodată versiunea engleză *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege* a lui P. Geach și M. Black (Oxford, Blackwell, 1960).

Pentru *Notițele introductive*, *Note*, *Studiul introductiv* și *Tabelul cronologic* am consultat, în afara edițiilor sus-amintite, următoarele surse fregeene:

— *Begriffsschrift und andere Aufsätze*, 2. Auflage. Mit E. Husserls und H. Scholz Anmerkungen, herausgegeben von Ignacio Angelelli (Georg Olms, Hildesheim, 1964);

— *Conceptual Notation and Related Articles*, translated and edited with a Biography and Introduction by Terrell Ward Bynum (Oxford, Clarendon Press, 1972);

— *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet* I, II (într-un singur volum, G. Olms, Hildesheim, 1962);

— *Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel*, hrsg. von Hans Hermes, Friedrich Kambartel, Friedrich Kaulbach. Erster Band: *Nachgelassene Schriften* (Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1969).

Nu am avut posibilitatea de a consulta volumul II, *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, al ediției menționate mai sus.



Sursele bibliografice secundare utilizate pentru Studiul introductiv, Notițe introductive și Note au fost menționate în cuprinsul acestora din urmă precum și în referirile de mai sus. Trebuie spus că nu am avut accesul decît la o parte relativ restrînsă din imensa bibliografie fregeană; într-o *Frege Bibliography, 1873—1966* alcătuită de Terrell Ward Bynum și Aline W. Bynum (în volumul *Conceptual Notation...* menționat mai sus, pp. 239—287), se citează 306 surse secundare, precum și alte 176 surse adiționale; în deceniul 1967—1976 bibliografia fregeană s-a îmbogățit cu sute de noi titluri.



În alcătuirea culegerii de față și în proiectul viitoarelor volume nu ne-am ghidat după criteriul cronologic. Astfel, a doua carte

a lui Frege, *Fundamentele aritmeticii*, apare în traducere înaintea cărții de debut *Scrierea conceptuală (Begriffsschrift)*. Motivul? Dorința de a deschide cititorului o cale cât mai accesibilă de acces la operă în totalitatea ei ne recomandă să operăm astfel, dat fiind că aspectul rebarbativ al dezvoltărilor simbolice atât de personale din *Begriffsschrift* îl putea descuraja pe cititorul de filosofie. Sperăm, dimpotrivă, că orice cititor al *Fundamentelor aritmeticii* va dori să citească mai dificila *Scriere conceptuală*; jocul cu mărgelile de sticlă al simbolurilor și încrengăturile grafice succedate pe pagini întregi le-am lăsat, așadar, pentru următorul volum care, după intenția noastră, ar urma să grupeze *Begriffsschrift*, câteva articole ale lui Frege gravitând în jurul problematicii de acolo precum și o traducere nouă a memorabilului „Sinn und Bedeutung“.

Structura volumului de față pune în lumină logicismul lui Frege și teoria cu privire la funcție, concept și obiect ca aspecte centrale ale teoriei sale logico-filosofice. Studiul introductiv nu și-a propus nici el să cuprindă integral și într-un dozaj proporționat cu justețe opera lui Frege în ansamblu; de aici, insistența cu care ne oprim asupra teoriei despre funcție, concept și obiect, sau relativa neglijare a semanticii sau a altor componente fundamentale ale viziunii fregeene, cărora dorim însă a le face dreptate în viitoarele volume.

Sperăm că această culegere va interesa pe iubitorul de filosofie, va sluji interesul său istoric și sistematic pentru filosofia logicii și matematicii ca parte integrantă a gândirii ultimului veac și ca torță ce luminează subteranele științelor formale. Cititorul contemporan, documentat prea bine asupra iluziilor panlogismului și logicismului, știe totuși că filosofia logicii și matematicii nu este o fundătură periferică, ci o cărare de acces obligată la magistrala filosofiei științifice. Câteva pietre unghiulare din drumul în spirală al filosofiei științei au fost așezate tocmai aici, la hotare care despart dar totodată leagă ca o punte domeniul întrebărilor integratoare de acela al răspunsurilor pe porțiuni înguste, leagă filosofia și știința. Se înțelege deci că nu numai istoria logicii ci și aceea a filosofiei are îndreptățirea să-l revendece pe Frege.

Nici o așteptare și nici o deschidere nu trebuie lăsate la

intrare de către cel ce se încumetă să pășească pe tărîmul filosofiei științelor exacte. Așteptările și deschiderile către problematica ființei umane nu sînt trădate de acea punere provizorie între paranteze pe care o reprezintă un demers filosofic ca acela fregean. A face abstracție nu înseamnă — în perspectiva unei totalități în devenire, cum este istoria filosofiei — a suprima concretul viu, ci a croi o cale de acces către acesta. Ultimul sfert al acestui secol nu va face, desigur, decît să repete lecția ultimului sfert de mileniu, și anume că logicianul sau matematicianul nu sînt specializări ale omului înstrăinat de sine decît în măsura în care omul însuși este înstrăinat de sine; în fapt, logicianul și matematicianul ar trebui să fie — și cu certitudine vor ajunge să fie — oricare dintre noi, personificări ale omului activ, deschis către lume și propria-i sine.

În acest spirit citindu-l pe Frege, aspirația umanistă a iubitorului de filosofie nu va fi nici trădată, nici înșelată, ci slujită cu temei și pe termen lung.

S.V.

SCRIERI LOGICO-FILOSOFICE

FUNDAMENTELE ARITMETICII

O CERCETARE LOGICO-MATEMATICĂ ASUPRA
CONCEPTULUI DE NUMĂR¹

NOTIȚĂ INTRODUCȚIVĂ

Prin această carte, de proporții modeste dar de încărcătură densă, logica își mărturisește o nouă vocație: aceea de a funda matematicile, lămurind prin intermediul unor definiții riguroase conceptele primitive ale aritmeticii. Aportul ei urma acum să stea nu doar în *metodă*, ci în însuși *conținutul* infuzat matematicilor. Căci acesta este logicismul: un program menit să asigure fundamente ferme dar nu autonome unei științe care s-a putut mindri întotdeauna cu certitudinea absolută a rezultatelor și relativa rigoare a metodelor însă nu a putut da seama pînă la capăt de propriile-i fundamente. Numerele sprijină edificiul aritmeticii, și pînă la urmă — activitatea reducționistă a matematicienilor ajunsese să dovedească acest punct delicat — sprijină întreaga disciplină. Căci pînă și figura și mișcarea, timpul adică și spațiul, sînt reductibile la număr, prin aritmetizarea analizei și algebrizarea geometriei. Ce sînt însă chiar numerele întregi, acești Atlanți pe care se sprijină cosmosul matematic? În a doua jumătate a secolului XIX, întrebarea devenea tot mai presantă. Într-adevăr, fusese întrevăzută deja calea prin care numerele complexe își găsesc interpretarea lor în planul geometric, reducîndu-se într-un fel la numărul real (Gauss); numărul real se poate construi din șiruri, sau din mulțimi de numere raționale (Weierstrass, Dedekind, Cantor); numărul rațional și numărul negativ se reduc și ele — prin raportare — la numărul întreg. Geometria însăși nu mai părea o lume autonomă; dacă intuiția spațială este un dat ireductibil (Kant), limbajul geometriei este în schimb traductibil în acela al algebrei mărimilor (Descartes), ba chiar al algebrei abstracte a structurilor (Klein, Programul de la Erlangen). Grație racordului făcut, fundarea geometriei și analizei ajunge să depindă într-un mod evident de fundarea aritmeticii.

În cartea sa, Frege afirmă: rigoarea demonstrațiilor nu este suficientă spre a funda aritmetica, fără a mai vorbi de faptul

că însăși această rigoare matematică nu a fost atinsă. Un sfert de secol mai târziu, atunci când idealul rigorii demonstrative va fi asociat intim demersului formal-axiomatic, Frege va accentua că însăși axiomatizarea, sprijinită pe logica matematică, nu asigură fundamentele unei discipline cum este geometria; se mai cere evidența adevărurilor prime, clara și distincta percepere a ideilor primare, inteligibilitatea nepusă în paranteze a conținuturilor. Frege nu l-a înțeles pe Hilbert, implicit deci nu privește matematica în termeni de structuri și modele. Și totuși, nici un adversar al acestei din urmă viziuni nu va fi contribuit mai mult la implantarea ei în viață prin asumarea unor obiective și făurirea unor instrumente perfecționate. Așa cum în viața socială o tehnologie nouă poate să apară într-un cadru inadecvat de relații și instituții, determinînd pînă la urmă înlocuirea lui, tot astfel proiectul logicist imaginat de Frege s-a putut autodizolva în ansamblul demersurilor fundaționiste, găsindu-și validarea în călătoria spre țel și nu în atingerea scopului ultim, în tehnologia intrinsecă și nu în folosința în imediat. Cu alte cuvinte, ca de atâtea ori, relația dintre scop și mijloace se inversează.

În ce constă însă, mai exact, acest proiect logicist, așa cum îl găsim încorporat în *Fundamentele aritmeticii*? Și în ce măsură călătoria lui Frege către o țintă — cum s-a dovedit — iluzorie constituie un episod semnificativ în istoria rațiunii?

Lucrurile se întîmplă în deceniul în care în mintea genială a lui Cantor gastează teoria mulțimilor, aritmetica numerelor infinite și definiția numărului cardinal, iar Dedekind pregătește și el o explicație asupra numărului ordinal și a numărului cardinal (*Was sind und was sollen die Zahlen?* apare în 1887), pornind de la ceea ce astăzi numim mulțimi și corespondențe sau aplicații biunivoce; către sfîrșitul aceluiași deceniu Peano va formula sistemul de axiome ale aritmeticii; axiomele aritmeticii, dealtfel, inclusiv principiul inducției matematice, se găsesc deja la Dedekind. Axiomatizarea aritmeticii dar, mai presus, analiza logică a ideilor fundamentale ale aritmeticii, reducerea lor la idei încă mai elementare pluteau așadar în aer. De asemenea, nu puțini erau matematicienii care meditau asupra numărului și mulțimii, chiar dacă nu la acest nivel de vîrf. Așadar, cartea lui Frege apare într-un moment în care sensul general al demer-

sului — reducerea numărului *via* definiții la concepte mai elementare — prindea contururi.

Va trebui totuși să treacă multă vreme pînă cînd încercările solitare să se găsească unele pe altele și să-și recunoască fondul comun. Marele învins al acestei perioade este Frege; validarea lui va veni tirziu și în etape. Deocamdată, la data apariției, cartea trece puțin observată. Într-o recenzie, Cantor găsea justă orientarea filosofică generală a cărții, pertinente observațiile critice de natură filosofică dar se cantona în observații minore, neesențiale asupra deosebirii dintre ceea ce el numește *Mächtigkeit* și ceea ce este pentru Frege numărul cardinal, *Anzahl*; Cantor sfîrșea prin a contesta valabilitatea definiției fregeene a numărului: se pare că întemeietorul teoriei mulțimilor nu a înțeles sensul definiției lui Frege și — ceea ce este mai frapant! — nu a întrevăzut echivalența definiției sugerate de Frege cu propria sa definiție. La fel, a doua reacție deconcertantă în epocă, la cartea lui Frege, este aceea a lui Husserl: în *Philosophie der Arithmetik*, Bd. I (1891), tinărul filosof găsește că *Fundamentele aritmeticii* sînt rodul unei subtilități exersate în gol, distincțiile fregeene fiind penetrante, însă nesemnificative. Ca și în cazul lui Cantor, observațiile critice vădesc neînțelegere și Frege a putut răspunde criticilor săi cu argumente solide. În rest, se mai poate consemna doar reacția lui Benno Kerry; reluînd problema distincției obiect-concept, acesta i-a dat astfel lui Frege prilejul de a dezvolta în „Über Begriff und Gegenstand“ cîteva aspecte dificile ale teoriei sale logico-filosofice.

Noul revoluționar întîmpină prea des rezistență; memoriile matematice ale lui Georg Cantor reprezintă unul din cele mai dramatice ilustrări ale destinului geniului. Neînțelegerea contemporanilor față de Prometeii cunoașterii este acel vultur din mit care devorează zi de zi pe eroul înlăntuit. În limbajul unui mit mai realist al zilelor noastre ar trebui să vorbim — cu un alt cuvînt elin — despre *paradigme*: Cantor și Frege luptau pentru afirmarea unei paradigme noi, întru totul străină modului primit, educat, de a vedea lucrurile, inerent majorității zdrobitoare a membrilor unei comunități științifice.

Dar dacă un Plutarh modern ar scrie cumva *Viețile paralele și interferate ale oamenilor iluștri din științe și arte*, afinitățile

și contrastele dintre Cantor și Frege, dintre oameni și opere i-ar putea oferi prilejul unor dezvoltări retorice. Iată, de pildă, dacă comparăm primirea contemporanilor: Cantor stârnește adversități, suspiciuni, patimi, aderențe și refuzuri nete, totuși nu se poate spune că lumea matematică manifestă indiferență față de mesajul său; Frege rămâne însă un solitar.

Cu *Fundamentele aritmeticii* s-a petrecut tot ce poate fi mai rău: la apariție, cartea lui Frege este înconjurată de o masivă indiferență, de o neînțelegere fără relief. Frege se temea — și lucrurile se vor repeta zece ani mai târziu când dă la iveală primul volum al *Legilor fundamentale ale aritmeticii* — tocmai de această indiferență. Când meditam asupra cauzelor opacității manifestate înăuntrul unei culturi în care matematica, filosofia și logica erau cultivate ca nicăieri în altă parte, nu mai putem da vina pe simbolismul neobișnuit al *Scrierii conceptuale*; căci în 1884, la cinci ani după experiența negativă cu prima sa carte, Frege încearcă să găsească o audiență cât mai largă, renunțând la un sistem de notații rebarbativ. El scrie adânc, limpede, sistematic, cu vîi scilpiri polemice. Dar noutatea revoluționară este trecută cu vederea de publicul savant al vremii, puțin dispus să se cufunde în subtilitățile unui autor ciudat, care scrie nematematic dar și nespeculativ despre matematică. Cum să explicăm deci neînțelegerea? Răspunsul l-ar putea da doar un eseu care să treacă în revistă diferiții factori care intră în joc, personali, interpersonali și comunitari. Aici vom aminti mai întâi faptul că Frege se adresează în același timp matematicienilor, filosofilor și logicienilor; însă un mesaj adresat mai multor comunități intelectuale poate fi receptat, la început, numai la intersecția mulțimilor respective, adică într-un mediu extrem de restrîns. Audiența devine și mai restrînsă atunci când mesajul este non-conformist, violentează habitudinile intelectuale, paradigmele instaurate. Or, Frege luptă împotriva unor adversari influenți: logica psihologistă a vremii și „concepțiile naive despre număr”. Nu numai atît: dacă Frege nu putea găsi înțelegere la un public educat în spiritul logicii tradiționale, el are dificultăți în a impune și în rîndurile adepților „Noii logici” reprezentată de algebra booleană, noua paradigmă a logicii predicatelor și metoda analizei filosofice întemeiată pe această logică (metodă aplicată,

de exemplu, în analiza conceptului de existență, în teoria descripțiilor și definiția numărului). Raționalismul filosofic impregnat de realism, neînregimentarea în una sau alta din direcțiile filosofice influente ale vremii, atacul împotriva confuziei naturaliste între psihologie și logică, profunzimea concepțiilor lui Frege — toate au contribuit la lipsa de succes în imediat a *Fundamentelor aritmeticii*, tot atât de mult ca și la asigurarea valorii perene.

Fundamentele aritmeticii au fost „descoperite” în zorii secolului nostru de către Bertrand Russell, adică tocmai de către un reprezentant prin excelență al acelui public interesat în același timp de filosofie, logică și matematică; definiția numărului, teoria descripțiilor, analiza logică în calitate de instrument al filosofiei au trebuit să treacă prin filtrul russellian spre a deveni apanajul unui cerc mai larg. Încă și astăzi nu puțini sînt cititorii — între ei, logicieni și filosofi de vază — care tind să atribuie lui Russell întrebări ce au fost puse pentru întâia oară de către Frege, soluții pe care profesorul de la Jena le-a preconizat înainte ca analistul englez să le fi dat o altă coloratură filosofică, o destinație, o dezvoltare și un context cu totul schimbat. Autorul teoriei tipurilor a văzut pe drept cuvînt în Frege un precursor și un inovator revoluționar în domeniul fundamentelor matematicii și al analizei logice. Nu vom merge atât de departe încît să afirmăm, cu o vorbă împrumutată de la și despre alții, că dezvoltările date de Russell sînt simple „note de subsol” la filosofia lui Frege; ne vom mărgini să afirmăm că o lectură a *Fundamentelor aritmeticii* este actul de dreptate al întoarcerii la sursă, cu efectul întineritor pe care îl are întotdeauna scîldarea la izvoarele gîndului. O întreagă direcție influentă a filosofiei de astăzi — reprezentată de Russell, în unele perioade ale evoluției sale, Wittgenstein din *Tractatus*, Carnap și Church *qua* logiciști ș.a. — pornește de aici nu în prelungire liniară, ci în sinuoasă curgere. Suflul raționalist, realist al cărții aparține unei epoci optimiste, care nu presimțea dificultățile din fundamentele matematicii, frîngerile intelectuale și dilemele filosofice. Și totuși, acest suflu filosofic izbutește să ajungă la noi, semn al energiei sale intrinseci, punînd în mișcare morile de vînt ale analizei filosofice și convertindu-se în alte forme de energie intelectuală.

În *Notele* aferente textului fregean ne-am străduit să punem în lumină detaliile cele mai revelatoare ale filosofiei și logicii lui Frege. Aici vom încerca unele observații și date care pot structura lectura *Fundamentelor aritmeticii* după criteriile esențiale.

1. Definiția logico-matematică a numărului întreg pozitiv este obiectivul central al cărții. Partea a IV-a oferă și fundamentează răspunsul: fiecare număr întreg (*Anzahl*) este un *obiect*, și anume un *obiect al logicii*; fiecare număr este sfera unui concept definit la rândul său pe baza unei relații între concepte. Orice număr luat în parte este sfera unui concept de forma „echinumeric cu conceptul F ”, unde F rămîne a fi determinat, în continuare, pentru fiecare număr. Frege arată totodată că îl putem determina pe F în calitate de concept pur logic, definindu-l prin intermediul relației de identitate, cuantorilor, negației și conectivelor propoziționale. Astfel, numărul zero este sfera conceptului „echinumeric cu conceptul de a fi neidentic cu sine”, sferă care înglobează toate conceptele echinumerice cu conceptul de a fi neidentic cu sine însuși. Dar conceptele sînt echinumerice atunci cînd obiectele din sferele lor pot fi puse în corespondență biunivocă, adică într-o relație definibilă ea însăși în termeni logici. Așadar, numărului zero îi aparțin ca elemente toate conceptele care pot fi puse în corespondență biunivocă cu conceptul determinat prin expresia „ x nu este identic cu x ” (sau ceva analog), deci conceptele sub care nu cade nici un obiect. Numărul zero este atunci ceea ce au comun toate conceptele de sferă vidă: putem spune aceasta, dacă prin „ceea ce au comun” nu vom înțelege totuși un concept *stricto sensu*, ci un *obiect abstract*; ceva este recunoscut ca obiect dacă apare desemnat printr-o expresie care admite articolul hotărît și poate fi subiectul unei propoziții singulare, dar nu poate fi predicat. Mai departe Frege îl definește pe 1 pe baza numărului zero, ca fiind extensiunea conceptului „echinumeric cu conceptul «identic cu zero»”. îl definește pe 2 ca fiind sfera conceptului „echinumeric cu conceptul «identic cu zero sau identic cu unu»” și arată cum, în general, odată definit un număr n îl putem defini pe succesorul său. Dacă fiecare număr în parte este un obiect, ele toate cad sub conceptul general de număr, pe care Frege îl explică, definind apoi relația de succesiune în cadrul șirului numerelor naturale și

demonstrînd logic unele proprietăți elementare ale șirului numerelor naturale și principiul inducției matematice. Operațiile aritmetice elementare (adunarea, înmulțirea și inversele lor) nu mai sînt definite, dar Frege avea sentimentul că reducerea întregii aritmetici la logică este pe calea cea bună, ea devenind prin intermediul definiției logico-matematice a numărului extrem de probabilă. Mai rămînea să se demonstreze pe cale pur logică teoremele aritmeticii, obiectiv căruia Frege i-a rezervat a treia sa carte, pregătită îndelung, *Grundgesetze der Arithmetik*.

Această privire din avion asupra definiției fregeene a numărului poate da călătorului neavizat sentimentul că sub el defilează priveliștile neobișnuit de austere ale unei planete străine. Impresia de insolit se poate șterge într-o oarecare măsură, străbătînd pas cu pas itinerarul fregean, familiarizîndu-ne cu detaliile și convingîndu-ne că drumul duce într-adevăr la țintă și nu în cine știe ce abisuri ale inconsistenței ori ininteligibilității. Dar întrebarea este dacă la capătul călătoriei — valoroasă, oricum, prin solicitările impuse, învingerea dificultăților fiind în sine o răsplată a efortului depus — ajungem să regăsim peisajul familiar al aritmeticii de toate zilele, să regăsim *die Kleinkinderzahlen* — cum obișnuia să spună Frege —, așadar dacă ceea ce s-a definit sînt într-adevăr numerele întregi așa cum credeam a le ști. Abia după aceea sîntem în măsură să ne întrebăm dacă definiția numerelor a apropiat de realizare programul logicist al reducerii la logică a aritmeticii.

Lăsînd la o parte obiecția de-a dreptul eronată după care definițiile ar cuprinde o circularitate, întrucît, de exemplu, în definiția numărului unu intervine expresia „există cel puțin un...” — o asemenea obiecție vădește numai regretabila neînțelegere a logicii — mai rămîne să ne raportăm la impresia genuină a oricărui cititor că definiția numărului n este neașteptată, corespunde prea puțin reprezentărilor și așteptărilor noastre, intuițiilor noastre neprevenite, că este de o lungime disproporționată, iar pentru un n moderat de mare definiția *detaliată* a numărului se dovedește nemoderat de lungă, în cuprinsul ei intrînd, de exemplu, disjuncția a n clauze propoziționale și alte operații. Obiecția nu este totuși atît de gravă pe cît pare la prima vedere. Putem răspunde, amintind că felul obișnuit de a înțelege numărul n ca

ocupînd al $n+1$ -lea loc în şirul numerelor naturale $0, 1, 2, \dots, n$, sau ca generat prin adunarea succesivă de n ori a unei unităţi la numărul zero nu comportă mult mai puţini paşi; în ambele cazuri, simplităţii aparente a numărului îi ia locul o complexitate. Menirea *analizei* logice este tocmai să substituie simplităţii aparente a elementelor unui sistem cum este şirul numerelor naturale complexitatea elementelor constitutive, asamblate în ordinea lor intrinsecă, să înlocuiască fiecare element prin tot atîtea microcosmosuri perfect structurate şi asamblate înăuntrul sistemului regăsit ca macrocosm. Într-un cuvînt, analiza logică trebuie să ofere *un model*; acest obiectiv, indubitabil, a fost atins.

2. Răspunsul la obiecţia de mai sus conduce însă direct la alta, de o natură diferită. Dacă un apologet al demersului fregean ar afirma că matematicianul de la Jena a urmărit să dea prin analiză logico-matematică *un model* al sistemului numerelor naturale, i s-ar putea răspunde că afirmaţia sa caracterizează mai curînd rezultatul efectiv decît obiectivul scontat iniţial; este prea exact că Frege dă *un model* al sistemului numerelor naturale, prin intermediul definiţiilor sale, însă ceea ce urmărea el era nu *un model*, ci — ca să spunem aşa — *Modelul* în-suşi, Modelul arhetipal şi unic, reducţia echivalentă cu Adevărul Absolut. Acest obiectiv nu poate fi socotit atins, de vreme ce dispunem astăzi de mai multe definiţii echivalente, însă diferite ale numerelor naturale, şi de vreme ce aceste definiţii sînt formulabile în limbajul teoriei mulţimilor, ca alternativă la logica de ordin superior de care făcea uz Frege. Astfel, rămînînd în sfera teoriei mulţimilor, una din definiţiile propuse îl defineşte pe 0 ca pe mulţimea vidă \emptyset , iar pe $n+1$ ca pe mulţimea care conţine ca unic element mulţimea n ; o altă definiţie bine cunoscută îl defineşte pe zero ca mulţimea vidă, $0 = \text{ar } \emptyset$, iar pe $n+1$ ca pe mulţimea conţinînd ca elemente toate numerele pînă la n inclusiv. În mod mai general, dificultatea poate fi asociată de sistemul axiomelor Dedekind-Peano pentru aritmetica elementară: sistemul caracterizează o clasă întreagă de modele izomorfe cu şirul numerelor naturale, inclusiv modele non-standard. Ce este deci fiecare număr natural în parte nu a fost arătat prin axiomatizarea formală a aritmeticii decît parţial; în măsura în care sistemul numerelor naturale mai are proprietăţi netriviiale pe care nu le are

vreun alt sistem de obiecte care satisface aceleași axiome, și în măsura în care asemenea proprietăți ar deriva din însăși natura elementelor componente, adică din presupusa natură intimă a numerelor naturale, se poate spune că nici caracterizarea axiomatice, nici definițiile lui Frege nu-și ating ținta. Unei asemenea întîmpinări grave nu i se poate răspunde cu dezinvoltura cu care am putut face față obiecției anterioare. Aici, într-adevăr, intrăm în zona întrebărilor de răspîntii.

Dificultatea gnoseologică de care ne ciocnim confruntînd definiția logico-matematică a numărului pe care o dă Frege cu tot ce a adus evoluția ulterioară se despică în două întrebări fundamentale.

Mai întîi, putem lega soarta reducției logiciste de aceea a sistemului Dedekind-Peano, observînd că Frege nu a făcut decît să analizeze mai departe termenii primitivi ai sistemului formal al aritmeticii și să releve complexitatea ascunsă a obiectelor din orice model al acestuia. În pofida aparențelor, Frege nu a împins — și cum ar fi putut? — analiza sa *formală* dincolo de punctul care ar permite caracterizarea modelului-standard al aritmeticii formale ca distinct de celelalte modele non-standard, în măsura în care demersul angajează axiomele și teoremele aritmeticii, adică adevărurile ei intrinseci. Desigur, el vorbește despre numere ca despre obiecte determinate avînd proprietăți bine definite, dar toate definițiile și teoremele sale poartă un caracter *formal*, dincolo de limita la care Frege credea și dorea să ajungă. Altfel spus, pentru Frege, caracterul *formal* este identificat cu natura *pur logică* a conținutului conceptual pus în joc, însă nicidecum nu cu posibilitatea *mai multor interpretări*. Aplicațiile sau exemplificările definițiilor și enunțurilor aritmetice — *id est* logice — pot fi oricît de multe, credea Frege, însă nu în înțelesul că ar accepta varii interpretări, angajînd astfel conținuturi conceptuale distincte. Or, existența mai multor modele ale sistemului formal incomplet al aritmeticii ne împinge tocmai să ne întrebăm dacă numerele mai sînt caracterizabile și altfel decît prin axiomele aritmeticii; definițiile aferente nu împing această caracterizare mai departe, ele stabilesc o legătură între aritmetică și logică (sau teoria mulțimilor) dar nu ne permit să dis-

criminăm între elementele modelului-standard și elementele celorlalte modele. Sau, pentru a nuanța, în măsura în care sînt epurate de orice element intuitiv, prin trecerea lor în limbajul formulelor, ele admit *eo ipso* traduceri felurite nesinonime dar perfect „echivalente“.

În al doilea rînd, făcînd abstracție de limitele intrinseci ale reducției aritmeticii la logică și mîngîindu-ne cu gîndul că, oricum, ea a relevat complexitatea nebănuită a numărului, pune pe gînduri autenticitatea reducției. Aritmetica a fost tradusă în limbajul subiacent — al cărei discipline? — Al teoriei mulțimilor, înclină îndeobște să răspundă matematicianul obișnuit; distincțiile introduse de Frege rămîn pentru majoritatea autorităților în materie simple subtilități care nu pot anula identitatea de esență între teoria mulțimilor și logica predicatelor de ordin superior cu identitate. (Într-adevăr, traducerea aritmeticii în limbajul logicii reclamă folosirea predicatelor de ordin superior). Este însă identică teoria mulțimilor cu logica? Altfel spus, este teoria mulțimilor varianta pur extensivistă a logicii? Sau trebuie să rămînem ferm la punctul de vedere fregean după care primatul conceptului asupra extensiunii sale merge pînă acolo încît devine cu neputință a mai vorbi despre mulțimi ca despre obiecte bine definite, în absența predicatelor prin intermediul cărora sînt introduse? — Pe de altă parte, *ce este logica?* Nu puțini filosofi s-au îndoit de faptul că logica de ordin superior are dreptul de a se numi logică în același sens plinar în care este logica predicatelor de ordinul 1 fără identitate. Și, în al treilea rînd, chiar dacă acceptăm fără vreo reticență ca logică pură teoria tipurilor (*id est* o logică de ordin superior evitînd paradoxele cunoscute) validarea reducției aritmeticii la logică întîmpină un obstacol din altă parte: cu toate că aritmetica se traduce integral în limbajul teoriei tipurilor, unele axiome presupuse de sistemul formal al aritmeticii nu sînt scheme valide, adevăruri logic-necesare, a căror negare ar crea vreo inconsistență formală. Ca atare, aritmetica ar fi logică numai dacă extindem nepermis înțelesul cuvîntului „logică”; în fapt, ea nu s-ar contopi, ci doar s-ar intersecta pe porțiuni largi cu logica propriu-zisă; granițele acesteia din urmă ar fi, dealtfel, imprecise.

Toate aceste întîmpinări și dubii justificate învederează amurgul programului panlogist — căci logicismul reprezintă tocmai un splendid panlogism filosofic investit cu aparențele științificității —, dar nu știrbesc cu nimic însemnătatea cuceririlor lui Frege în logică și filosofia matematicii.

3. Efortul lui Frege trebuie evaluat nu doar prin prisma rezultatului fundamental, legat de definiția numărului, oricît de însemnat ar fi însuși acesta. La o dreaptă măsură ajungem numai cîntărind în sine rezultatele privite de Frege însuși ca simple mijloace. El făcea logică în vederea asigurării unor fundamente trainice edificiului matematic; însă el nu a apelat la o concepție preexistentă, ci și-a făurit, printr-un efort titanic, instrumentele de care avea nevoie. Pentru logică și filosofie, scrierea lui Frege are o semnificație mai mare chiar decît pentru fundamentele și filosofia matematicii.

Împreună cu anterioara *Scriere conceptuală* din 1879, *Fundamentele aritmeticii* inaugurează un *nou stil* în filosofia matematicii; ele recomandă *analiza logică exactă* a conceptelor și propozițiilor, logica matematică cu întreg alaiul ei de criterii și idei teoretice, ca pe un ingredient esențial al reflecției filosofice asupra matematicii. Logica devine cureaua de transmisie între proiectul filosofic și creația matematică. După ce, grație algebrei logicii, străvechea disciplină ctitorită de Aristotel își dovedise capacitatea de înnoire prin *receptarea* instrumentului matematicii, acum vine să arate că are tot alîta de dat cît de primit, ca într-o autentică *Filie*: un Platon *redivivus* ar putea exemplifica prin restituția creatoare a datoriei contractate de logică conceptul ideal al prieteniei.

Independent de adoptarea sau respingerea punctului de vedere logicist, logica ajunge efectiv *Organon* al fundamentelor și filosofiei matematicii: Nu numai ca instrument esențial al metamatematicii în sens hilbertian, nu numai ca mijloc al construcției sistemelor formale și chiar ca parte constitutivă — subsistem — al acestor sisteme, ci și ca mediu deosebit de prielnic reflexiei filosofice. Dacă mai adăugăm aportul la filosofia logicii și la logica formală propriu-zisă, *Fundamentele aritmeticii* apar ca una dintre cele mai bogate desfășurări de gînd produse de secolul XIX la confînele logicii, filosofiei și matematicii. Într-o enumerare

incompletă am putea menționa, în această ordine de idei, distincția concept-obiect argumentată de Frege ca bază teoretică a formalizării termenilor generali în logica predicatelor, teoria descripțiilor, analiza conceptului de „existență” cu aplicare la „argumentul ontologic”, infirmat pe temeiuri logice, metoda definițiilor prin abstracție, descifrarea conținutului formal al „determinării numerice” (Zahlangabe), ca stînd în aplicarea unui număr la un concept, metoda generală de desprindere a conceptelor și relațiilor din forme propoziționale cu variabile libere ș.a. Sperăm că am stăruit suficient în cuprinsul *Notelor* însoțitoare asupra acestor inovații, pentru ca acum să ne fie îngăduit a trece mai departe, la elementul propriu-zis *filosofic* al gîndirii lui Frege.

4. Metoda fregeană a analizei logice crește pe temelia unei *filosofii* a logicii, matematicii și limbajului ca dintr-un sistem de rădăcini bine ramificate și împlîntate în solul unui raționalism consecvent, al unei epistemologii alimentată de problematica marilor filosofii ale lui Leibniz și Kant. După cum va remarca lesne cititorul, întrebarea fundamentală de la care pleacă matematicianul german poartă nu asupra ființei lumii, ci asupra cunoașterii logico-matematice; în joc intră *natura judecăților matematice*: sînt adevărurile matematicii analitice ori sintetice *a priori*? Cum se vede, întrebarea este formulată în termenii lui Kant. Acestor termeni kantieni, Frege le conferă însă un sens revizuit. Distincția analitic-sintetic este legată de distincția epistemologică sensibil-rațional (logic), pe cînd distincția *a priori* — *a posteriori* poartă asupra justificării intrinseci a conținuturilor judecate, și nu asupra condițiilor în care se mișcă cunoașterea ca operă a subiectului uman. Epurînd ca psihologiste orice preocupări legate de geneza cunoașterii subiective, ceea ce mai rămîne pentru epistemologie este fundarea conținutului obiectiv. Totodată, analitic este pentru Frege orice adevăr derivat exclusiv din legile fundamentale ale logicii și din definiții, în timp ce sintetică este orice propoziție în al cărei conținut intră un element factual, non-logic. Propozițiile geometriei sînt sintetice *a priori*, cele ale logicii însă analitice; judecățile aritmeticii sînt analitice dacă și numai dacă aritmetica este reductibilă la logică. Ipoteza logicistă a lui Frege comandă bateria argumentelor filosofice din *Scrierea conceptuală* și *Fundamentele aritmeticii*, critica îndreptată împotriva unor con-

cepții tradiționale despre număr și adevăr aritmetic. Frege respinge empirismul lui Mill, „aritmetica pietricelelor și a turtelor dulci“, argumentînd că numărul nu are o esență fizică, nu caracterizează agregatele fizice, ci conceptele. Universală aplicabilitate a numărului desfiide orice încercare de a trage din sectorul restrîns al aplicațiilor la colecțiile fizice vreo informație asupra naturii lui intrinseci. Așa cum mulțimile însele nu sînt grămezi de obiecte, ci abstracții determinate prin concepte — altfel, „mulțimea vidă“ nu ar avea sens, iar mulțimea cu un singur element ar fi însuși elementul —, tot așa numerele nu sînt mulțimi de unități, ci obiecte logice determinate prin concept — altfel zero nu ar avea sens, iar unu nu ar fi propriu-zis număr, cum credeau și elinii. La fel de hotărît respinge Frege concepția „formală“ care identifică numărul cu un simbol al cărui conținut ar fi dictat arbitrar. În schimb, Frege acceptă teza leibniziană a analiticității adevărurilor aritmetice. În spiritul epistemologiei raționaliste, Frege s-a străduit să separe elementul logic de acela factual, să separe rațiunea de sensibilitate, sub cuvînt că orice unire a lor ar însemna o imixtiune a psihologicului în sfera logicului.

Împotriva lui Kant și mai aproape de Leibniz, el accentuează că rațiunii îi pot fi date obiecte, independent de sensibilitate. De Kant, Frege se desparte și prin distincția tranșantă operată între concept și reprezentare, distincție echivalentă în ochii profesorului de la Jena cu aceea între obiectiv și subiectiv în cunoaștere, și astfel între logic și psihologic. În sfera obiectivului, distincția nu mai puțin importantă trasată între concept și obiect este de natură pur logică, cu importante consecințe pentru teoria logică, practica formalizării și filosofia limbajului. O altă distincție de importanță majoră, de asemenea plasată în sfera obiectivului, vine să se adauge, colorînd ontologic întreaga concepție: distincția între ceea ce are (numai) obiectivitate și ceea ce are (pe deasupra) realitate. Obiectele lumii materiale, date sensibilității, au realitate, în timp ce conceptele și obiecte abstracte în genul numerelor, mulțimilor, sau, de exemplu, linia ecuatorului, au numai obiectivitate, dar nu realitate. Obiectivitatea, Frege o înțelege în două sensuri, fie ca existență în afară de subiect, fie ca însușire de a fi „același pentru toți“. Obiectele abstracte și conceptele

au obiectivitate însă nu realitate. Frege nu este astfel realistul platonian cu care ne-a obișnuit o parte a exegezei, fiindcă el nu hipostaziază entitățile pînă la a le conferi realitate, ceea ce ar fi însemnat — după cum reiese deslușit din explicațiile date de el — a le conferi atributul existenței autonome în spațiu și timp. Despre realitatea lumii materiale, la care sensibilitatea are acces, Frege se exprimă în termenii realismului sănătos, materialist al omului înzestrat cu bun-simț, fără a recurge la argumentele scepticului sau la problematica despărțire kantiană între aparența fenomenală (lucrul pentru noi) și lucrul în sine. Numerele însă, și la fel conceptele, neavînd realitate au autonomie logică (dacă este vorba de primele) sau n-o au (conceptele), dar obiectivitate au pe deplin.

FUNDAMENTELE ARITMETICII

CUPRINS²

- § 1. În ultimul timp în matematică se conturează tendința spre demonstrații riguroase și definiții precise ale conceptelor.
- § 2. Investigația trebuie să ajungă în cele din urmă la conceptul de număr. Scopul demonstrației.
- § 3. Mobiluri de ordin filosofic ale unor asemenea cercetări: controversele în jurul faptului dacă legile numerelor sînt adevăruri analitice sau sintetice, apriorice sau aposteriorice. Sensul expresiilor de mai sus.
- § 4. Scopul acestei cărți.

I. Opiniile unor autori asupra naturii propozițiilor aritmetice

Sînt oare demonstrabile formulele numerice?

- § 5. Kant contestă aceasta, iar Hankel vede aici, pe drept cuvînt, un paradox.
- § 6. Demonstrația lui Leibniz că $2+2=4$ are o lacună. Definiția lui $a+b$ la Grassmann este greșită.
- § 7. Părerea lui Mill că definițiile numerelor individuale afirmă fapte observate din care calculele decurg este neîntemeiată.
- § 8. Justificarea definițiilor nu reclamă observarea acestor fapte.

Sînt oare legile aritmeticii adevăruri inductive?

- § 9. Lege a naturii la Mill. Spunînd că adevărurile aritmetice sînt legi ale naturii, Mill le confundă cu aplicațiile lor.
- § 10. Temeiuri pentru a contesta că legile adunării sînt adevăruri inductive; neuniformitatea numerelor; definiția numerelor nu oferă de la sine o mulțime de proprietăți comune ale numerelor; probabil că inducția este aceea care trebuie fundată pe baza aritmeticii.
- § 11. „Înnăscut“ la Leibniz.

Legile aritmeticii sînt oare sintetice a priori sau sînt analitice?

- § 12. Kant. Baumann. Lipschitz. Hankel. Intuiția interioară ca temei al cunoașterii.
- § 13. Diferența dintre aritmetică și geometrie.
- § 14. O comparație între adevăruri sub raportul domeniilor guvernate de ele.
- § 15. Concepțiile lui Leibniz și St. Jevons.
- § 16. Împotriva lor, Mill discreditează „manipularea iscusită a limbajului“. Semnele nu sînt goale numai pentru că nu semnifică ceva perceptibil.
- § 17. Insuficiența inducției. Presupunerea că legile inducției sînt judecări analitice; în ce constă atunci utilitatea lor. Apreciere a valorii judecăților analitice.

II. Opiniile unor autori asupra conceptului de număr

- § 18. Necesitatea unei analize a conceptului general de număr.
- § 19. Definiția nu poate fi geometrică.
- § 20. Este definibil numărul? Hankel. Leibniz.

Este oare numărul o proprietate a lucrurilor exterioare?

- § 21. Opiniile lui M. Cantor și E. Schröder.
- § 22. Opinia contrară a lui Baumann: lucrurile exterioare nu constituie unități stricte. Numărul depinde în aparență de modul nostru de concepere a lucrurilor.
- § 23. Nu se poate admite opinia lui Mill, după care numărul este o proprietate a unui agregat de lucruri.
- § 24. Larga aplicabilitate a numărului. Mill. Locke. Figura metafizică incorporeală a lui Leibniz. Dacă numărul ar fi de natură senzorială, el nu ar putea fi atribuit nesenzorialului.
- § 25. Diferența de ordin fizic între 2 și 3 la Mill. Potrivit lui Berkeley, numărul nu există *realiter* în lucruri, ci este o creație a cugetului.

Este numărul ceva subiectiv?

- § 26. Descrierea construcției numărului la Lipschitz nu este adecvată și nu poate înlocui o definiție a conceptului. Numărul nu este un obiect al psihologiei, el este obiectiv.

- § 27. Numărul nu este, cum pretinde Schloemilch, reprezentarea poziției unui obiect în cadrul unui șir.

Numărul ca mulțime

- § 28. Thomae despre conferirea denumirilor.

III. Opinii privitoare la Unitate și Unu

Exprimă numeralul „unu” o proprietate a obiectelor?

- § 29. Ambiguitatea expresiilor „μονάς” și „unitate”. Definiția dată de E. Schröder: unitatea ca obiect al numărării este în aparență inadecvată. Adjectivul „un” nu cuprinde o determinare mai precisă, nu poate servi ca predicat.
- § 30. Tentativele lui Leibniz și Baumann de definire a unității par să estompeze total conceptul unității.
- § 31. Criteriile indivizibilității și delimitării la Baumann. Nu orice obiect ne conduce la ideea unității (Locke).
- § 32. Și totuși, limba indică o conexiune cu indivizibilitatea și delimitarea, dar se produce o deplasare de sens.
- § 33. Indivizibilitatea (G. Kopp) nu poate fi ridicată la rangul de criteriu al unității.

Sint oare identice unitățile?

- § 34. Identitatea ca temei al denumirii „unitate”. E. Schröder. Hobbes. Hume. Thomae. Prin abstra-

gere de la diferențele lucrurilor nu se obține conceptul de număr, iar lucrurile nu devin identice între ele.

- § 35. Diversitatea este necesară chiar spre a se putea vorbi despre pluralitate. Descartes. E. Schröder. St. Jevons.
- § 36. Înțelegerea unităților ca distincte se ciocnește de dificultăți. Unu-urile distincte la St. Jevons.
- § 37. Definițiile numărului pe baza unității sau a lui unu, la Locke, Leibniz, Hesse.
- § 38. „Unu“ este un nume propriu, „unitate“ este un nume comun. Numărul nu poate fi definit ca unități. Deosebirea dintre „și“ și +.
- § 39. Dificultatea concilierii identității cu discernabilitatea unităților este camuflată de ambiguitatea cuvîntului „unitate“.

Încercări de a înlătura dificultatea

- § 40. Spațiul și timpul ca mijloace de distingere. Hobbes. Thomae. Împotriva lor: Leibniz, Baumann, St. Jevons.
- § 41. Țelul nu este atins.
- § 42. Poziția în cadrul unui șir ca mijloc de distingere. Hankel despre instituire.
- § 43. Oglindirea obiectelor prin mijlocirea semnului 1 la Schröder.
- § 44. Abstragerea de la caracterul diferențelor cu păstrarea faptului existenței lor la Jevons. 0 și 1 sînt numere la fel ca celelalte. Dificultatea continuă să subziste.

Soluția dificultății

- § 45. Privire retrospectivă.
- § 46. Aserțiunea numerică cuprinde un enunț despre un concept. Obiecția că numărul variază, conceptul rămânând neschimbat.
- § 47. Caracterul factual al aserțiunii numerice se explică prin obiectivitatea conceptului.
- § 48. Soluția unor dificultăți.
- § 49. Confirmare la Spinoza.
- § 50. Explicația lui E. Schröder.
- § 51. Corectarea acesteia.
- § 52. Confirmare într-o uzanță a limbii germane.
- § 53. Distincția dintre notele unui concept și proprietățile acestuia. Existență și număr.
- § 54. Unitate se poate numi subiectul unei aserțiuni numerice. Indivizibilitatea și delimitarea unității. Identitate și discernabilitate.

IV. Conceptul de număr

Fiecare număr individual este un obiect de sine-stătător

- § 55. Încercare de a completa definițiile leibniziene ale numerelor individuale.
- § 56. Definițiile propuse sînt inaplicabile, întrucît ele explică un enunț în cadrul căruia numărul nu este decît o parte.
- § 57. Aserțiunea numerică trebuie înțeleasă ca egalitate între numere.

- § 58. Obiecția că nu ne putem reprezenta numărul ca obiect autonom. Numărul nu este în genere reprezentabil.
- § 59. Investigarea obiectelor nereprezentabile nu trebuie exclusă.
- § 60. Pînă și lucrurile concrete nu sînt întotdeauna reprezentabile. Cuvintele trebuie considerate în cadrul propoziției, atunci cînd căutăm semnificația lor.
- § 61. Obiecția nespațialității numerelor. Nu orice lucru obiectiv este spațial.

Spre a obține conceptul de număr trebuie stabilit sensul unei identități numerice

- § 62. Ne trebuie un criteriu al identității numerice.
- § 63. Posibilitatea corespondenței univoce ca atare criteriu. Dubiu logic asupra definirii identității special pentru acest caz.
- § 64. Exemple de proceduri analoge: direcția, orientarea unui plan, forma unui triunghi.
- § 65. O încercare de definiție. Un al doilea dubiu: sînt oare satisfăcute legile identității?
- § 66. Al treilea dubiu: criteriul identității este insuficient.
- § 67. Criteriul nu poate fi completat adoptîndu-se ca notă a unui concept modul de introducere a unui obiect.
- § 68. Numărul ca extensiune a unui concept.
- § 69. Explicație.

Completare și verificare a definiției noastre

- § 70. Conceptul de relație.
- § 71. Corespondență printr-o relație.
- § 72. Relația biunivocă. Conceptul de număr.
- § 73. Numărul care revine conceptului F este identic cu numărul care revine conceptului G atunci când există o relație care pune în corespondență biunivocă obiectele de sub F cu obiectele de sub G .
- § 74. Zero este numărul care revine conceptului „neidentic cu sine“.
- § 75. Zero este numărul care revine unui concept sub care nu cade nimic. Sub un concept nu cade nici un obiect, dacă numărul care revine acestuia din urmă este zero.
- § 76. Definiția expresiei „ n succede imediat lui m în șirul numerelor naturale“.
- § 77. 1 este numărul care revine conceptului „identic cu 0“.
- § 78. Propoziții demonstrabile prin intermediul definițiilor noastre.
- § 79. Definiția succesiunii într-un șir.
- § 80. Observații referitor la aceasta. Obiectivitatea succederii.
- § 81. Definiția expresiei „ x aparține φ — șirului terminat cu y “.
- § 82. Schiță a demonstrației că nu există un membru ultim al șirului numerelor naturale.
- § 83. Definiția numărului finit. Nici un număr finit nu este propriul său succesor în șirul numerelor naturale.

Numere infinite

- § 84. Numărul care revine conceptului „număr finit“ este un număr infinit.
- § 85. Numerele infinite la Cantor; „putere“. Divergență terminologică.
- § 86. Succesiune în cadrul unei consecuții la Cantor. Succesiune în cadrul unui șir la mine.

V. Încheiere

- § 87. Natura legilor aritmetice.
- § 88. Subaprecierea judecăților analitice de către Kant.
- § 89. Principiul lui Kant: „Fără sensibilitate nu ne-ar fi dat nici un obiect“. Meritele lui Kant față de matematică.
- § 90. Demonstrația completă asupra naturii analitice a legilor aritmeticii reclamă un lanț de raționamente fără fisuri.
- § 91. Scrierea mea conceptuală permite înlăturarea lacunei.

Alte numere

- § 92. Hankel despre sensul problemei privind posibilitatea numerelor.
- § 93. Numerele nu sînt nici în spațiu, în afara noastră, nici subiective.
- § 94. Non-contradicția unui concept nu ne garantează că sub acest concept cade ceva; la rîndul ei, non-contradicția reclamă o demonstrație.

- § 95. Pe $(c-b)$ nu-l putem privi necondiționat ca pe un semn care soluționează problema scăderii.
- § 96. Nici matematicianul nu poate să creeze ceva în mod arbitrar.
- § 97. Conceptele trebuie distinse de obiecte.
- § 98. Definiția pe care Hankel o dă adunării.
- § 99. Insuficiența teoriei formale.
- § 100. Încercare de a înțelege numerele complexe printr-o extindere specială a semnificației înmulțirii.
- § 101. Posibilitatea unei asemenea înțelegeri nu este îndiferentă pentru forța demonstrației.
- § 102. Simpla postulare a posibilității unei operații nu înseamnă și satisfacerea ei.
- § 103. Definiția numerelor complexe la Kossak este de fapt numai un îndreptar general în vederea unei definiții și nu previne imixtiunea unui element străin. Reprezentarea geometrică.
- § 104. Problema revine la a stabili sensul unei judecăți de recunoaștere pentru numerele noi.
- § 105. Farmecul aritmeticii izvorăște din caracterul ei rațional.
- §§ 106—109. Privire retrospectivă.

FUNDAMENTELE ARITMETICII

INTRODUCERE

La întrebarea ce este numărul unu, sau ce înseamnă semnul 1, se răspunde de obicei: „un lucru”³. Iar dacă vom atrage atenția asupra faptului că propoziția

„numărul unu este un lucru”

nu constituie o definiție, deoarece într-o parte ea conține articolul hotărît, pe cînd în cealaltă parte articolul nehotărît, că ea nu face decît să încadreze numărul unu printre lucruri, fără a specifica însă despre care lucru este vorba, ni se va răspunde, probabil, că ne putem alege oricare lucru vrem spre a-l numi unu. Dar dacă fiecare ar avea dreptul să înțeleagă sub această denumire orice dorește, atunci una și aceeași propoziție despre unu ar fi înțeleasă în mod diferit de către oameni diferiți; aceste propoziții nu ar avea vreun conținut comun. Poate că unii vor refuza să răspundă la această întrebare, arătînd că semnificația literei a în cadrul aritmeticii nu poate fi nici ea precizată, și că, în cazul cînd am spune „ a înseamnă un număr”, afirmația noastră ar putea suscita aceeași obiecție ca definiția: „unu este un număr”. Or, în cazul lui a , refuzul de a răspunde la întrebare este pe deplin îndreptățit; într-adevăr, a nu semnifică un număr determinat, specificat ca atare, ci servește pentru a exprima universalitatea propozițiilor. Dacă în $a + a - a = a$ punem în locul lui a un număr arbitrar, dar același peste tot, obținem întotdeauna o egalitate adevărată. Acesta este sensul în care este folosită litera a . În cazul lui unu însă, lucrurile stau cu totul altfel. Oare în egalitatea $1 + 1 = 2$ putem înlocui pe 1, în ambele locuri unde apare, prin unul și același obiect, de pildă Luna? Dimpotrivă, s-ar părea că pe primul 1 trebuie să-l înlocuim prin ceva diferit de ceea ce înlocuiește pe al doilea 1. Cum se face că aici trebuie procedat într-un mod care în celălalt

caz ar fi eronat? Totodată, aritmetica nu se poate mulțumi numai cu litera *a*, ci este nevoită să utilizeze și alte litere (*b*, *c* etc.), pentru a exprima în formă generală relații între numere diferite⁴. S-ar putea presupune deci că nici semnul 1 nu ar fi suficient, dacă, în mod similar, el ar fi destinat să confere generalitate propozițiilor. Dar numărul unu apare ca un obiect determinat ale cărui proprietăți pot fi specificate; de exemplu, unu are proprietatea de a rămâne neschimbat în cazul înmulțirii cu el însuși. În acest sens, dimpotrivă, *a* nu are proprietăți care pot fi specificate, întrucît ceea ce se enunță despre *a* este o proprietate comună a tuturor numerelor, în timp ce $1^1=1$ nu enunță nimic despre Lună, despre Soare, despre Sahara sau despre vîrfurile Teneriffe; într-adevăr, ce sens ar putea avea un atare enunț?⁵

La întrebări ca acestea nici matematicienii, în majoritatea lor, nu sînt pregătiți să dea un răspuns satisfăcător. Nu este însă penibil ca știința să persiste în neclaritate, în privința obiectului ei primordial, obiect atît de simplu în aparență? Cu atît mai puțin se va putea spune ce este numărul în genere. Atunci însă cînd un concept fundamental al unei științe importante suscită dificultăți, cercetarea mai amănunțită a acestui concept, în scopul depășirii dificultăților, constituie o sarcină imperioasă, cu atît mai mult cu cît ar fi greu să se elucideze pe deplin natura numerelor negative, raționale sau complexe, atîta timp cît înțelegerea fundației pe care se reazemă întregul edificiu al aritmeticii rămîne nesatisfăcătoare.

Mulți vor considera, desigur, că aceasta ar fi o osteneală de prisos. După părerea lor, conceptul în cauză a fost tratat suficient în manualele elementare și epuizat astfel o dată pentru totdeauna. Cine ar crede că mai are ceva de învățat într-o chestiune atît de simplă? Conceptul de număr întreg pozitiv este considerat a fi într-atît de neproblematic, încît se crede că el ar putea fi prezentat științific și exhaustiv pînă și copiilor și că oricine, fără a mai trebui să reflecteze și să cunoască ceea ce au gîndit alții, știe tot ce se poate ști despre acest concept.

Prin urmare, nu este îndeplinită deloc prima condiție preliminară a învățării: a.ști că nu știm⁶. Rezultatul este că ne mulțumim în continuare cu o concepție rudimentară, deși încă Herbart^{**} profesase o doctrină mai adecvată⁷. Este tulburător și demoralizant faptul că rezultatele dobândite anterior riscă astfel mereu să se piardă iarăși, că atîta trudă pare să fi fost zadarnică, și aceasta numai pentru că autosuficiența ne face să nu considerăm necesar a ne însuși roadele cunoașterii. Îmi dau bine seama că și lucrarea de față este expusă aceluiași pericol. Împotriva mea se ridică acea concepție rudimentară după care calculul ar fi o gîndire agregativă, mecanică^{***}. Personal, mă îndoiesc că în genere există o asemenea gîndire⁸. Mai curînd am putea admite o facultate a reprezentării de natură agregativă, însă ea nu prezintă vreo însemnătate pentru calcul. În esență, gîndirea este peste tot aceeași: legile gîndirii nu se diferențiază după un obiect sau altul. Deosebirile constau doar în gradul mai mare sau mai mic de puritate și de independență față de factorii de ordin psihologic și față de mijloacele auxiliare exterioare ale gîndirii (limbajul, notațiile numerelor etc.), precum și în finețea mai mare sau mai mică a construcției conceptelor; însă tocmai în această privință matematica nu poate fi depășită de nici una dintre științe, nici măcar de către filosofie.

Din scrierea de față se va putea vedea că pînă și un raționament în aparență atît de specific matematic cum este cel de la n la $n+1$, se întemeiază pe legile generale ale logicii⁹ și că nu avem nevoie să apelăm la legi speciale ale unei gîndirii agregative. Firește, noi putem folosi mecanic simbolurile numerelor, tot așa cum putem vorbi papagalicește; însă cu greu s-ar putea numi aceasta gîndire. Dar, ce-i drept, este posibil ca limbajul simbolic

^{**} *Sämtliche Werke*, ed. Hartenstein, vol. X, Partea I, *Umriss pädagogischer Vorlesungen*, § 252, Obs. 2: „Doi nu înseamnă două lucruri, ci dublarea“ etc.

^{***} K. FISCHER, *System der Logik und Metaphysik oder Wissenschaftslehre*, ed. 2, § 94.

al matematicii să fie astfel construit, prin intermediul gândirii reale, încît ulterior, ca să spunem așa, să gîndească el pentru noi. Aceasta însă nu dovedește că numerele s-ar fi format într-un anume mod mecanic, așa cum, de pildă, grămezile de nisip se formează din grăunțe de cuarț¹⁰. După părerea mea, este în interesul matematicienilor ca să combatem o atare concepție care duce la discreditarea unui obiect principal al științei lor și discreditează astfel însăși această știință. Afirmații de același gen le putem întîlni însă pînă și în lucrările matematicienilor. În opoziție cu aceste concepții, va trebui să admitem, dimpotrivă, că conceptul de număr are o structură mai complicată decît aceea a majorității conceptelor din alte științe, deși numărul rămîne unul din cele mai simple concepte aritmetice¹¹.

Pentru a spulbera deci iluzia că numerele întregi pozitive nu suscită de fapt nici o dificultate și că există un consens unanim asupra lor, am considerat oportun să discut unele păreri ale filosofilor și matematicienilor, în legătură cu problemele ridicate aici. Se va vedea cît de puțin concordă între ele aceste păreri; vom avea prilejul să întîlnim chiar și concepții diametral opuse. De exemplu, în timp ce unii afirmă că „unitățile sînt identice între ele“, alții le consideră diferite, fiecare aducînd în sprijinul poziției sale argumente care nu pot fi respinse fără o examinare atentă. Ceea ce mi-am propus în cele de față este să trezesc dorința unei analize mai minuțioase. Totodată, examinarea preliminară a părerilor exprimate de alții va curăți terenul pentru propria mea concepție, astfel ca oricine să se convingă din capul locului că celelalte căi nu duc la țintă și că părerea mea nu este una printre multe altele, egal îndreptățite; sper astfel să rezolv definitiv problema, cel puțin în aspectele ei esențiale.

Desigur, expunerea mea va lua astfel o turnură mai filosofică decît ar putea admite numeroși matematicieni; însă analiza temeinică a conceptului de număr comportă

inevitabil un anumit element filosofic. Problema aparține atât matematicii cît și filosofiei.

Dacă în pofida demersurilor întreprinse de ambele părți, conlucrarea celor două științe este departe de a înflori, așa cum am dori și cum ar fi și posibil, această stare de lucruri, după părerea mea, se datorește preponderenței în filosofie a metodelor psihologice de analiză, metode care au pătruns pînă și în domeniul logicii. Această orientare nu are nici un punct de contact cu matematica, fapt ce explică lesne aversiunea multor matematicieni față de considerentele filosofice. Astfel, cînd Stricker* spune că reprezentările noastre asupra numerelor sînt fenomene motorii, dependente de senzațiile musculare, matematicianul nu mai este în măsură a recunoaște aici numerele sale și nu are ce să facă cu o propoziție de acest gen. O aritmetică fundată pe senzații musculare ar fi, de bună seamă, senzațională, însă ar rămîne la fel de confuză ca și fundațiile pe care se reazimă. Nu, aritmetica nu are nici o tangență cu senzațiile, precum nici cu imaginile interioare plămuite din urmele impresiilor senzoriale anterioare. Inconstanța și vagul în care plutesc toate aceste configurații contrastează puternic cu precizia și soliditatea conceptelor și obiectelor matematicii. Cercetarea reprezentărilor și a metamorfozelor suferite de acestea se poate dovedi, firește, utilă; psihologia nu trebuie să-și închipuie însă că ar putea aduce vreo contribuție la fundamentarea aritmeticii¹². Pentru matematician ca atare, aceste imagini mentale, geneza și transformarea lor, nu prezintă nici o importanță. Stricker însuși afirmă că el nu asociază cuvîntului „o sută“ altceva decît reprezentarea semnului 100. Alții și-ar putea reprezenta litera C sau orice altceva. Oare de aici nu urmează că, în cazul nostru, aceste imagini mentale sînt absolut irelevante pentru esența chestiunii? Nu urmează că ele sînt absolut accesorii, asemenea tablei negre și a unei bucăți de cretă care, nici ele, nu pot fi numite reprezentări ale număru-

* *Studien über Association der Vorstellungen*, Viena, 1883.

lui o sută? Așadar, nu ne este îngăduit să credem că esența chestiunii ar consta în asemenea reprezentări! Să nu confundăm descrierea modului de apariție a unei reprezentări cu o definiție, să nu confundăm determinarea condițiilor psihosomatice în care devenim conștienți de o propoziție cu demonstrația acesteia și să nu confundăm adevărul unei propoziții cu faptul de a fi gândită. Trebuie reamintit, se pare, că o propoziție nu încetează a fi adevărată în clipa când eu încetez să o mai gândesc, tot așa cum nici Soarele nu dispăre în clipa când închid ochii. În caz contrar, s-ar putea ajunge pînă acolo încît în demonstrarea teoremei lui Pitagora să trebuiască să menționăm conținutul în fosfor al creierului nostru, iar un astronom să șovăie să extindă concluziile sale asupra trecutului îndepărtat, de teamă ca să nu i se obiecteze: „Ai socotit aici că $2 \cdot 2 = 4$; însă ideea de număr are și ea o evoluție, o istorie! E îndoielnic ca ea să fi ajuns încă de pe atunci într-un stadiu atît de avansat. De unde știi că în acel trecut îndepărtat propoziția noastră exista deja? Oare ființele de atunci nu ar fi putut avea propoziția $2 \cdot 2 = 5$, din care apoi, prin selecție naturală în cursul luptei pentru existență, să fi luat naștere propoziția $2 \cdot 2 = 4$? Și, — cine știe! — poate că însăși această din urmă propoziție este cumva sortită să se transforme, în același mod, în $2 \cdot 2 = 3$ “. — *Est modus in rebus, sunt certi denique fines!* Abordarea istorică chemată să dea la iveală devenirea lucrului, pentru a cunoaște astfel însăși esența acestuia, are, desigur, justificarea sa; ea își are însă limitele sale. Dacă în fluxul continuu al tuturor lucrurilor nu am mai reține nimic stabil, etern, universul ar înceta să mai fie recognoscibil și totul s-ar topi într-un vârtej haotic. După cum s-ar părea, unii își închipuie că noțiunile apar în sufletul individual așa cum apar frunzele pe copaci și consideră că am putea cunoaște esența conceptelor cercetînd apariția acestora și dîndu-le o explicație psihologică, pornind de la natura cugetului uman. Această concepție transformă însă orice lucru în ceva subiectiv și, dusă pînă la capăt, e la antipodul adevărului.

Ceea ce se numește istorie a conceptelor este de fapt istoria cunoașterii de către noi, fie a conceptelor, fie a semnificațiilor cuvintelor. Așa cum se întâmplă în mod frecvent, abia un imens efort intelectual care poate continua secole întregi duce la cunoașterea unui concept în puritatea sa, curățat de suprapunerile străine care îl ascund ochilor minții. Ce să spunem atunci despre acei care, în loc de a duce mai departe această operă în domeniile unde ea nu pare a se fi încheiat, o desconsideră și se refugiază în camera copiilor sau în cele mai străvechi perioade ale evoluției omenirii, pentru ca să descopere acolo, ca J. St. Mill, aritmetica turtelor dulci sau a pietricelelor! Nu ne mai rămîne decît să atribuim aromelor culinare o semnificație specială pentru conceptul de număr. O asemenea procedură se situează la antipodul celei raționale și este, în orice caz, cum nu se poate mai nematematică. Nu e de mirare că matematicienii nu vor să audă nimic despre ea! În loc de a afla o deosebită puritate a conceptului pe măsură ce credem a ne apropia de izvoarele sale, toate lucrurile apar ca printr-o ceață, spălăcite și amorfe. Lucrurile se prezintă ca și cum, pentru a cunoaște America, cineva ar vrea să se pună iarăși în situația lui Columb, în momentul cînd acesta a zărit prima lucire șovăielnică a presupusei sale Indii. Firește, această comparație nu demonstrează nimic; sper însă că ea înfățișează cît se poate de limpede punctul meu de vedere. În numeroase cazuri, se poate întâmpla, desigur, ca istoria descoperirilor anterioare să-și dovedească utilitatea ca demers preliminar în vederea cercetărilor ulterioare; dar nu este permis ca ea să uzurpe locul acestora¹³.

În ceea ce îi privește pe matematicieni, combaterea unor atari concepții ar fi fost într-adevăr superfluă; întrucît însă în încercarea de a soluționa controversatele probleme discutate i-am avut în vedere și pe filosofi, m-am văzut silit să fac mici incursiuni în domeniul psihologiei, fie și numai pentru a respinge intruziunea ei în domeniul matematicii.

Dealtfel, formulări psihologice întâlnim pînă și în manualele de matematică. Atunci cînd autorul se simte obligat să dea o definiție fără a fi însă în stare să-și realizeze intenția, el încearcă cel puțin să descrie modul în care se ajunge la obiectul sau conceptul respectiv. Situația poate fi identificată cu ușurință: în cursul expunerii ulterioare autorul nu se mai întoarce niciodată la asemenea explicații. Demersurile introductive, în scopuri didactice, sînt pe deplin justificate; trebuie însă să le distingem întotdeauna în mod clar de o definiție. Un exemplu admirabil al modului în care pînă și matematicienii pot confunda temeiurile demonstrației cu condițiile psihice sau fizice ale producerii demonstrației ni-l oferă E. Schröder*, atunci cînd, sub titlul „Axiomă specială“, scrie următoarele: „Principiul pe care l-am avut în minte s-ar putea intitula Axioma inerenței semnelor. Acest principiu ne dă certitudinea că de-a lungul tuturor expunerilor și raționamentelor noastre, semnele rămîn întipărite atît în memoria noastră, cît și — cu atît mai mult — pe hîrtie“ ș.a.m.d.¹⁴

Dacă, pe de o parte, matematica trebuie să refuze orice asistență din partea psihologiei, pe de altă parte ea nu poate contesta strînsa ei conexiune cu logica. Eu merg chiar pînă la a fi de acord cu cei care susțin imposibilitatea unei delimitări nete între matematică și logică. În orice caz, se va admite că orice investigație asupra valabilității unei demonstrații sau a justificării unei definiții este, în mod inevitabil, o investigație de natură logică. Dar asemenea chestiuni nu pot fi eliminate din matematică, deoarece numai dîndu-le un răspuns putem obține certitudinea necesară.

În această direcție, de asemenea, eu merg desigur ceva mai departe decît se obișnuiește. Majoritatea matematicienilor se mulțumesc, atunci cînd sînt întreprinse cercetări de acest gen, să răspundă cerințelor imediate. Cînd o definiție se dovedește operantă în cadrul demonstra-

* *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra.*

țiilor, cînd nu ne ciocnim nicăieri de contradicții, cînd descoperim conexiuni între lucruri aparent fără legătură între ele și ajungem astfel la o ordonare și o regularitate superioară, obișnuim a considera că definiția respectivă a fost asigurată într-un mod satisfăcător și ne mai interesăm prea puțin de justificarea ei logică. Acest procedeu are în orice caz avantajul că nu ne abate prea mult de la țelul urmărit. Sint și eu gata să admit că definițiile trebuie apreciate după eficiența lor, după posibilitățile pe care le oferă în vederea efectuării demonstrațiilor. Trebuie însă să ținem seama de faptul că rigoarea demonstrației rămîne iluzorie, chiar dacă lanțul deducțiilor nu prezintă nici o lacună, atîta timp cît definițiile nu-și găsesc justificarea decît în mod tardiv, și anume prin faptul că nu am ajuns la o contradicție. Procedînd astfel, unica certitudine pe care o putem dobîndi este esențialmente empirică și efectiv trebuie să acceptăm eventualitatea descoperirii ulterioare a unei contradicții care să ruineze întregul edificiu¹⁵. Din acest motiv, m-am crezut obligat să revin mai mult decît consideră a fi necesar majoritatea matematicienilor asupra fundamentelor logice generale.

În cercetarea de față am adoptat trei principii fundamentale:

trebuie să distingem întotdeauna în mod riguros psihologicul de logic, subiectivul de obiectiv¹⁶;

semnificația cuvintelor nu trebuie căutată în izolarea lor, ci numai în contextul propoziției¹⁷;

trebuie avută în vedere distincția dintre concept și obiect¹⁸.

Conform primului principiu, am folosit întotdeauna cuvîntul „reprezentare“ [Vorstellung] în sens psihologic, făcînd o distincție între reprezentări, pe de o parte, concepte și obiecte, pe de altă parte. Atunci cînd nu se respectă al doilea principiu, ne vedem siliți să acceptăm în calitate de semnificații ale cuvintelor imagini mentale sau acte ale psihicului individual, încălcînd astfel primul

principiu. În ceea ce privește al treilea punct, ar fi o iluzie să ne închipuim că un concept poate fi transformat în obiect, fără a-l modifica. De aici urmează că o anumite teorie formală larg răspîndită asupra fracțiilor, numerelor negative etc. este inconsistentă. În scrierea de față nu pot decît să indic în linii mari o soluție mai bună. În cazul numerelor de acest tip, ca și în cazul numerelor întregi pozitive, problema revine la a stabili sensul unei identități.

Cred că rezultatele la care am ajuns vor obține, cel puțin în linii mari, adeziunea acelor matematicieni care își dau osteneala să examineze argumentele mele. Mi se pare că ele plutesc deja în aer, și nu este exclus ca fiecare dintre ele în parte, sau cel puțin rezultate apropiate, să fi fost deja exprimate; cu toate acestea, așa cum sînt prezentate aici în conexiunea lor reciprocă, ele pot constitui încă o noutate. Am fost adesea surprins să constat că expuneri care într-o anumită privință se apropiau foarte mult de propria mea concepție, se îndepărtau totuși în mod substanțial de ea, în alte privințe.

Felul cum vor fi primite aceste rezultate de către filosofi va diferi de la caz la caz, în funcție de punctul de vedere al fiecăruia; cea mai rea primire le-o vor face, desigur, empiriștii care nu recunosc ca procedeu originar de raționament decît inducția și pînă și pe aceasta o consideră nu ca un raționament propriu-zis, ci ca o deprindere. Poate că un filosof sau altul va folosi acest prilej pentru a supune propria sa teorie a cunoașterii unei noi verificări. Celor care ar înclina să critice definițiile mele ca artificiale, le-aș sugera că în cazul de față problema nu este dacă aceste definiții sînt naturale, ci dacă ele ating miezul chestiunii și sînt logic inatacabile.

Îmi permit să sper că și filosofii, dacă vor examina fără prejudecăți scrierea mea, vor găsi unele lucruri folositoare.

§ 1. După ce s-a îndepărtat un timp de la rigoarea euclidiană, matematica se reîntoarce în prezent la ea și se străduiește chiar să o depășească. În aritmetică, fie și numai datorită originii indiene a mai multor metode și concepte ale sale, se încetățenise un mod de gîndire mai puțin riguros decît în geometrie, care a fost cu precădere o creație a grecilor. Elaborarea analizei superioare nu a făcut decît să stimuleze această tendință; într-adevăr, tratarea riguroasă a acestei teorii s-a ciocnit de dificultăți considerabile, aproape de neînvins, dificultăți a căror depășire nu făgăduia totuși să răsplătească eforturile depuse în acest scop. Evoluția ulterioară a arătat însă din ce în ce mai limpede că matematica nu se poate mulțumi cu simpla convingere morală, susținută de numeroase aplicații încununate de succes. Pentru numeroase aserțiuni care înainte erau admise, ca de la sine înțelese, se pretinde astăzi o demonstrație. În multe cazuri, limitele de valabilitate ale unei propoziții au ajuns să fie stabilite astfel pentru prima oară. S-a arătat că noțiunile de funcție, continuitate, limită, infinit necesită o definiție mai riguroasă. Numărul negativ și numărul irațional, care fuseseră admise de mai multă vreme în cadrul științei, au fost supuse unei examinări mai exigente, chemată să stabilească dreptul lor de cetățenie.

Pretutindeni ne întîmpină astfel aspirația de a da demonstrații riguroase, de a delimita precis granițele validității și, spre a se putea ajunge la aceasta — tendința de a defini riguros conceptele.

§ 2. Urmînd acest drum, va trebui să ajungem la conceptul de număr¹⁹ și la cele mai simple propoziții asupra numerelor întregi pozitive care constituie fundamentul întregii aritmetici. Negreșit, formule numerice cum sînt $5+7=12$ și legi ca aceea a asociativității adunării își

găsesc atâtea confirmări în cadrul numeroaselor lor aplicații cotidiene, încît punerea lor la îndoială, prin reclamarea unei demonstrații, poate părea de-a dreptul ridicolă. Dar, prin însăși natura ei, în locul unei verificări inductive matematica preferă, ori de cîte ori aceasta este posibil, o demonstrație. Euclid demonstrează numeroase lucruri pe care oricine i le-ar fi admis oricum. Dar, atunci cînd matematicienii nu s-au mai declarat satisfăcuți cu gradul euclidian de rigoare, ei au ajuns la cercetările legate de axioma paralelelor.

Astfel, încă de pe acum orientarea în direcția unei rigori maxime a depășit în numeroase privințe cerințele inițiale, accentuîndu-se mereu și extinzîndu-se în diverse domenii.

Demonstrația, trebuie spus, nu are numai scopul de a pune adevărul unei propoziții la adăpost de orice îndoială; ea ne face cunoscută, de asemenea, dependența reciprocă a adevărurilor. După ce încercările nereușite de a-l clinti ne-au convins că un bloc de piatră este de neclintit, mai rămîne să ne întrebăm ce anume îl susține atît de solid. Cu cît ducem mai departe aceste cercetări, cu atît mai puține ajung adevărurile inițiale la care reducem totul; această simplificare, luată în sine, este un scop demn de toată atenția noastră²⁰. Nu este exclus ca să se confirme și o altă speranță, anume aceea ca, pornind de la elucidarea activității spontane a oamenilor în cazurile cele mai simple și desprinzînd de aici elementul universal valid, vom ajunge la cunoașterea unor procedee generale de elaborare a conceptelor și de întemeiere a propozițiilor, procedee aplicabile chiar în cazurile mai complicate²¹.

§ 3. Mobiluri de ordin filosofic m-au condus de asemenea la cercetări de acest gen. Întrebările privind natura apriorică sau aposteriorică, sintetică sau analitică a adevărurilor aritmetice își așteaptă aici răspunsul lor. Într-adevăr, deși înseși aceste concepte aparțin filosofiei²², soluția, după părerea mea, nu poate fi obținută fără a chema în ajutor matematica. Firește, aceasta depinde de sensul pe care îl dăm problemelor în cauză.

Nu odată se întâmplă ca descoperirea conținutului unei propoziții să preceadă demonstrația riguroasă a acesteia din urmă, obținută pe alte căi, mai anevoioase; însăși această demonstrație ne permite adesea să cunoaștem mai precis condițiile valabilității propoziției. În genere, deci, problema modului în care ajungem la conținutul unei judecăți trebuie separată de problema modului în care justificăm aserțiunea respectivă.

După părerea mea, distincțiile între *a priori* și *a posteriori*, sintetic și analitic, nu privesc conținutul judecății, ci justificarea emiterii ei*. Acolo unde justificarea lipsește, dispare și posibilitatea efectuării acestei clasificări. O eroare apriorică este așadar un lucru la fel de absurd ca, de pildă, un concept albastru. Când spunem că o propoziție este aposteriorică sau apriorică în sensul pe care îl am eu în vedere, noi nu judecăm asupra condițiilor psihologice, fiziologice și fizice care au permis constituirea în conștiință a conținutului propoziției; de asemenea, nu ne pronunțăm asupra modului în care altcineva a ajuns s-o considere, poate în mod eronat. adevărată; ne pronunțăm asupra temeiului cel mai adânc care justifică acceptarea adevărului acestei propoziții.

Problema este astfel scoasă din domeniul psihologiei și plasată în domeniul matematicii, atunci când este vorba de un adevăr matematic. Acum, ceea ce se cere este de a descoperi demonstrația, reducînd-o, pas cu pas, pînă la adevărurile primitive. Dacă, odată angajați pe acest drum, ajungem numai la legile logice generale și la definiții, adevărul are un caracter analitic; se presupune, totodată, că au fost luate în considerație și acele propoziții de care depinde admisibilitatea fiecărei definiții²³. Dacă însă efectuarea demonstrației este imposibilă atîta timp cît nu facem apel la adevăruri care nu sînt de natură general-logică, ci aparțin unui anumit domeniu special al științei,

* Prin aceasta nu urmăresc, desigur, să atribui un nou sens acestor termeni, ci numai să stabilesc ceea ce au avut în vedere autori anteriori și în special Kant.

propoziția este sintetică. Pentru ca un adevăr să fie aposterioric, este necesar ca demonstrația lui să facă apel la fapte; cu alte cuvinte, să folosească adevăruri indemonstrabile și care nu au caracter universal, ele cuprinzând enunțuri despre obiecte determinate în mod special²⁴. Dacă, dimpotrivă, demonstrația poate fi întreprinsă exclusiv pe baza unor legi universale, care nu admit și nici nu pretind o demonstrație, atunci adevărul este aprioric*.

§ 4. Pornind de la aceste probleme filosofice, ajungem la aceleași cerințe care, independent de aceasta, se ridicaseră în matematici — cerința de a demonstra cu rigoare maximă, ori de câte ori este posibil, propozițiile fundamentale ale aritmeticii. Într-adevăr, numai eliminarea cât se poate de scrupuloasă a oricărei lacune din lanțul raționamentelor ne permite să afirmăm cu deplină certitudine care sînt adevărurile originare pe care se sprijină demonstrația; or, problemelor de mai sus le vom putea da un răspuns numai cu condiția ca să cunoaștem aceste adevăruri.

Dacă încercăm acum să dăm curs acestei cerințe, ajungem imediat la propoziții a căror demonstrare rămîne imposibilă atîta timp cît nu reușim să reducem conceptele care figurează în cadrul lor la alte concepte mai simple, sau la un element de mai mare generalitate²⁵. În cazul de față este vorba în primul rînd despre număr, care trebuie să fie sau definit sau recunoscut ca fiind imposibil de definit. Cartea de față își propune elucidarea acestei

* Admițînd în genere existența unor adevăruri universale, trebuie să admitem totodată existența unor legi originare; într-adevăr, numai din fapte individuale nu decurge nimic, decît în temeiul unei legi. Însăși inducția se sprijină pe propoziția generală potrivit căreia demersul inductiv poate întemeia adevărul unei legi, sau cel puțin probabilitatea aceleia din urmă. Pentru cel ce contestă aceasta, inducția nu este decît un fenomen psihologic, un procedeu prin care oamenii ajung să creadă în adevărul unei propoziții, fără ca ceea ce ei cred să aibă cea mai mică justificare.

chestiuni*. Răspunsul dat va determina și soluția problemei privind natura legilor aritmetice.

Înainte de a aborda înseși aceste chestiuni, îmi propun să fac câteva observații preliminare privitor la ceea ce ar putea constitui cheia unui răspuns. Într-adevăr, dacă abordînd problema prin prisma altor concepții vom afla temeiuri pentru a atesta caracterul analitic al propozițiilor fundamentale ale aritmeticii, atunci aceste temeiuri vor pleda și pentru demonstrabilitatea aceluiași propoziții, precum și pentru posibilitatea definirii conceptului de număr. O înrîurire în sens opus o vor avea temeiurile caracterului aposterioric al acestor adevăruri. De aceea, este indicat să întreprindem un examen preliminar al acestor chestiuni controversate.

I. Opiniile unor autori asupra naturii propozițiilor aritmetice

Sînt oare demonstrabile formulele numerice?

§ 5. Formulele numerice care se referă la numere determinate, cum este formula $2 + 3 = 5$, trebuie distinse de legile generale valabile pentru toate numerele.

Aceste formule sînt considerate de către unii filosofi** ca indemonstrabile și nemijlocit evidente, asemenea unor axiome²⁶. Kant*** le declară indemonstrabile și sintetice, ezitînd însă a le denumi axiome, dat fiind faptul că ele nu sînt generale și că sînt în număr infinit²⁷. Han-

* Ca atare, în cele ce urmează, atunci cînd nu se va specifica nimic altceva, va fi vorba numai despre numerele pozitive întregi, care răspund la întrebarea „cîți”, „cîte”.

** Hobbes, Locke, Newton. Cf. BAUMANN, *Die Lehren von Zeit, Raum und Mathematik*, pp. 241 și 242, 365 și urm., 475.

*** *Kritik der reinen Vernunft*, herausgeg. v. Hartenstein, III, p. 157.

kel²⁸ afirmă pe drept cuvînt că admiterea unei infinități de adevăruri originare indemonstrabile este paradoxală și inadecvată. În fapt, ea contrazice una din exigențele rațiunii, și anume evidența fundamentelor prime. Să fie oare nemijlocit evident că

$$135\,664 + 37\,863 = 173\,527?$$

Nicidecum! Și tocmai aceasta îl face pe Kant să susțină natura sintetică a acestor propoziții. Dar același fapt pledează cu atît mai mult împotriva indemonstrabilității aceluiași propoziții; căci cum altfel decît prin intermediul unei demonstrații le-am putea sesiza, de vreme ce ele nu prezintă o evidență nemijlocită? Kant nu ezită să invoce intuiția degetelor sau a punctelor²⁹, riscînd astfel ca, împotriva intenției sale, să prezinte ca empirice aceste propoziții; căci, într-adevăr, intuiția a 37 863 de degete nu este în nici un caz o intuiție pură. Mai mult, termenul „intuiție” nu pare a fi adecvat, dat fiind că și 10 degete, prin dispunerea lor într-un mod sau altul, pot suscita cele mai felurite intuiții. Dar, în genere, avem noi oare o intuiție a 135 664 de degete sau puncte? Dacă am avea această intuiție, împreună cu intuiția a 37 863 de degete și alta a 173 527 de degete, valabilitatea formulei noastre, dacă ea ar fi indemonstrabilă, ar fi imediat evidentă, cel puțin în cazul degetelor; însă nu acesta este cazul.

Kant a avut în vedere, desigur, numai numere mici. Așadar, formulele pentru numere mari ar fi demonstrabile, în timp ce formulele pentru numere mici sînt nemijlocit evidente prin intuiție. Însă trasarea unei distincții principiale între numerele mici și numerele mari este contestabilă, cu atît mai mult cu cît între ele cu greu s-ar putea trage o linie de demarcație rigidă. Dacă formulele numerice ar fi demonstrabile începînd de la 10, să spunem, ne-am putea întreba pe drept cuvînt: de ce nu începînd de la 5, de la 2, de la 1?

* *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihren Funktionen*, p. 55.

„Că 2 și cu 2 fac 4 nu este un adevăr imediat; să admitem că *patru* înseamnă trei și cu unu. Demonstrația poate fi făcută, și anume astfel:

Definiții: 1) Doi este unu și cu unu.

2) *Trei* este *Doi* și cu unu.

3) *Patru* este Trei și cu unu.

Axiomă: înlocuind egali prin egali, egalitatea persistă.

Demonstratie: $2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 3 + 1 = 4$

Def. 1. Def.2. Def.3.

Deci, conform axiomei: $2 + 2 = 4$."

La prima vedere, această demonstrație pare a fi integral construită din definiții și din susmenționata axiomă. La rîndul ei, axioma ar putea fi transformată într-o definiție, așa cum procedează însuși Leibniz într-un alt loc²⁴. S-ar părea că despre 1, 2, 3, 4 nu avem nevoie să știm decît ceea ce este cuprins în definiții. La o examinare mai atentă descoperim însă o lacună, camuflată de omiterea parantezelor. Și anume, pentru a fi mai riguroși, trebuia să se scrie:

$$2 + 2 = 2 + (1 + 1)$$

$$(2 + 1) + 1 = 3 + 1 = 4.$$

Lipsește aici propoziția

$$2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1,$$

propoziție care constituie un caz particular al lui

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

* *Nouveaux Essais*, IV, § 10, ed. Erdmann, p. 363.

** *Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis*, ed. Erdmann, p. 94.

Dacă asumăm această lege, se constată cu ușurință că orice formulă a adunării poate fi demonstrată în mod similar. Așadar, fiecare număr trebuie definit pe baza celui precedent. În fapt, nu văd cum un număr ca 437 986 ar putea să ne fie dat într-un mod mai adecvat decît acela propus de Leibniz. Chiar fără a avea vreo reprezentare preliminară despre acest număr, noi reușim astfel a-l lua în stăpînire. Mulțimea infinită a numerelor este redusă, prin intermediul acestor definiții, la numărul unu și mărirea cu unu; orice formulă din infinitatea formulelor numerice se poate demonstra pe baza cîtorva propoziții generale.

Aceasta este și opinia lui H. Grassmann³⁰ și a lui H. Hankel. Primul încearcă să obțină legea

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1$$

pe baza unei definiții, după cum urmează*:

„Dacă a și b sînt termeni arbitrari ai șirului fundamental, vom înțelege prin suma $a + b$ acel termen al șirului fundamental care satisface formula

$$a + (b + e) = a + b + e.”$$

Aici, e trebuie să însemne unitatea pozitivă. Împotriva acestei interpretări putem aduce două observații. În primul rînd, suma este definită prin ea însăși. În cazul cînd nu știm încă ce înseamnă $a + b$, nu înțelegem nici expresia $a + (b + e)$. Această obiecție ar putea fi însă evitată, eventual, dacă — intrînd desigur în contradicție cu formularea de mai sus — nu suma, ci adunarea ar constitui obiectul definiției. Dar, și în acest caz s-ar putea obiecta că $a + b$ constituie o notație lipsită de conținut atunci cînd nu există nici un termen al șirului fundamental, sau cînd există mai mulți termeni ai acestuia care ar satisface condiția prescrisă. Grassmann presupune pur și simplu, fără demonstrație, că aceasta nu se în-

* *Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten*. Partea I. *Arithmetik*, Stettin, 1860, p. 4.

tîmplă niciodată; dar astfel, rigoarea procedului său rămîne o simplă aparență.

§ 7. S-ar putea crede că formulele numerice sînt sintetice sau analitice, aposteriorice sau apriorice, după cum sînt și legile generale de care atîrnă demonstrația lor. John Stuart Mill³¹ este însă de părerea opusă. Ce-i drept, la început el pare să intenționeze a întemeia știința — ca și Leibniz³² — pe definiții*, deoarece definește numerele individuale în același mod ca și Leibniz; însă judecata sa că întreaga cunoaștere este empirică denaturează imediat această idee justă. Într-adevăr, el ne aduce la cunoștință** că definițiile în cauză nu ar fi definiții în sens logic, că ele nu se mărginesc să stabilească semnificația unei expresii, ci afirmă totodată un fapt observat. Dar ce anume putea fi, în întregul univers, faptul observat sau — cum mai spune Mill — faptul fizic asertat în cuprinsul definiției numărului 777 864? Din întregul imperiu al faptelor fizice care se volatilizează aici sub ochii noștri, Mill ne specifică unul singur, care ar urma să fie asertat în cadrul definiției numărului 3. Acest fapt constă, după Mill, în existența unor colecții de obiecte care, producînd asupra simțurilor noastre impresia 0⁰, pot fi totodată separate în două părți astfel: 0 0 0. Spre fericirea noastră, nu toate lucrurile din lume sînt bătute în ținte! Căci dacă ar fi fost așa, nu am fi putut efectua această separație și 2+1 nu ar mai fi fost 3! Ce păcat însă că Mill nu ne-a înfățișat și acele fapte fizice care stau la baza numerelor 0 și 1!

Mill continuă: „După ce această propoziție a fost acceptată, noi numim toate grupările de acest fel 3.“ Constatăm, așadar, că de fapt nu este corect să vorbim despre trei băței, atunci cînd ceasul bate trei, sau să numim dulcele, acru și amarul trei senzații gustative; la fel de inadmisibilă este și expresia „trei metode de rezolvare a

* *System der deduktiven und induktiven Logik*, übersetzt von J. Schiel, III. Buch, XXIV cap., § 5.

** *Op. cit.*, Cartea a II-a, cap. VI, § 2.

unei ecuații“. Într-adevăr, niciunul din cazurile amintite nu oferă o impresia senzorială similară cu cea produsă de 0^0 .

Mill spune însă: „Calcululele nu decurg din definiția însăși, ci din faptele observate“. Dar oare unde ar fi trebuit să apeleze Leibniz la amintitul fapt, în cadrul demonstrației de mai sus a propoziției $2+2=4$? Mill omite indicarea acestei lacune, deși propria lui demonstrație pentru propoziția $5+2=7$ este absolut analogă demonstrației lui Leibniz*. Adevărata lacună, care rezidă în omiterea parantezelor, nu este sesizată de Mill, cum nu a sesizat-o nici Leibniz.

Dacă definiția fiecărui număr în parte ar aserta într-adevăr un fapt fizic particular, niciodată nu l-am putea admira destul, pentru profunda cunoaștere a naturii de care dă dovadă, pe acel om care operează cu numere cu nouă cifre. Poate că Mill nu merge în această privință atât de departe, încît să susțină că toate aceste fapte ar trebui observate unul cîte unul, ci opiniază că ar fi suficient să derivăm prin inducție o lege generală care să le înglobeze pe toate. Dar dacă încercăm a formula această lege, vom constata că este imposibil. Nu ajunge să spunem: există colecții mari de lucruri, colecții care pot fi separate în părți; căci, spunînd aceasta nu am spus că există colecții de mărimea și felul celor pe care le reclamă, de pildă, definiția numărului 1 000 000 și nici nu am specificat mai exact modul separării lor. Concepția lui Mill duce în mod necesar la cerința ca pentru fiecare număr să existe un fapt observat în mod deosebit, căci în cadrul unei legi generale s-ar pierde tocmai ceea ce este caracteristic pentru numărul 1 000 000 și aparține neapărat definiției acestuia. Potrivit lui Mill, noi nu putem afirma de fapt că $1\,000\,000 = 999\,999 + 1$, dacă în prealabil nu am observat acest mod caracteristic de separare în părți a unei colecții de lucruri, mod care diferă de cel propriu oricărui alt număr.

* Op. cit., Cartea a III-a, cap. XXIV, § 5.

§ 8. Mill pare a susține că definițiile $2=1+1$, $3=2+1$, $4=3+1$ etc., nu sînt admisibile înainte ca faptele la care dînsul se referă să fi fost observate. Într-adevăr, nu putem să definim 3 ca $(2+1)$, înainte de a fi acordat un sens lui $(2+1)$. Se pune însă întrebarea dacă pentru aceasta este nevoie să observăm colecția respectivă, precum și separarea ei în părți. Dacă ar fi așa, numărul 0 ar rămîne o enigmă, căci nimeni nu a izbutit pînă în clipa de față să vadă sau să pipăie 0 pietricele³³. Mill ar spune, fără îndoială, că 0 este ceva lipsit de sens, un simplu mod de a vorbi; calculele cu 0 ar fi numai un joc cu semne goale; singurul lucru de mirare ar fi cum de aici mai poate rezulta ceva rațional. Dacă însă aceste calcule au o semnificație serioasă, însuși semnul 0 nu poate fi cu totul lipsit de sens. Dar atunci se conturează de la sine eventualitatea ca, în același mod ca 0, $2+1$ să aibă un sens chiar dacă faptul invocat de Mill nu a fost observat. Într-adevăr, cine ar putea pretinde că a observat acel fapt pe care, după Mill, l-ar conține definiția unui număr cu 18 cifre, și cine ar tăgădui că un asemenea număr are totuși un sens?

Se va fi crezînd, poate, că de faptele fizice s-ar face uz numai pentru numere mai mici — pînă la 10, să spunem — pe cînd celelalte numere ar putea fi construite plecînd de la acestea. Dar dacă 11 poate fi format din 10 și 1 printr-o simplă definiție, fără a trebui să mai vedem colecția corespunzătoare, atunci nu există un temei să nu putem construi în același fel și numărul 2, din 1 și 1. Dacă operațiile de calcul efectuate cu numărul 11 nu decurg dintr-un anume fapt caracteristic pentru acest număr, cum se face totuși că operațiile cu numărul 2 trebuie să se sprijine pe observarea unei anumite colecții și pe o anumită separare caracteristică a acesteia din urmă?

Poate că se va ridica întrebarea: cum ar fi cu puțință aritmetica, dacă nu am putea distinge prin intermediul simțurilor noastre nici un lucru, sau am putea distinge numai trei lucruri? Nu încapе îndoială că o atare stare

de lucruri s-ar răsfrînge nefavorabil asupra cunoașterii de către noi a propozițiilor aritmetice și a aplicațiilor acestora; ar fi însă afectat și adevărul acestor propoziții?³⁴ Atunci cînd numim empirică o propoziție din motivul că pentru a deveni conștienți de conținutul acesteia a trebuit să facem observații, noi nu folosim cuvîntul „empiric” în sensul în care este opus lui „aprioric”. Noi emitem o aserțiune psihologică ce privește numai conținutul propoziției; chestiunea adevărului propoziției nu este luată aici în considerație. În acest sens, poveștile lui Munchhausen sînt și ele empirice; căci, negreșit, pentru ca ele să poată fi născocite au trebuit să fie făcute felurite observații.

Sînt oare legile aritmeticii adevăruri inductive?

§ 9. Considerațiile expuse pînă în prezent fac probabilă derivabilitatea formulelor numerice exclusiv pe baza definițiilor numerelor individuale, cu ajutorul cîtorva legi generale, fără ca aceste definiții să aserteze fapte observate sau să presupună legitimitatea unor atare fapte. Se pune deci problema de a stabili natura respectivelor legi.

În demonstrația amintită mai sus a formulei $5 + 2 = 7$, Mill* vrea să aplice principiul: „ceea ce este compus din părți este compus din părți ale acestor părți”. El consideră această propoziție ca o formulare mai pregnantă a principiului cunoscut îndeobște sub forma: „sumele egalilor sînt egale”. Mill o numește adevăr inductiv și lege naturală de ordinul cel mai înalt. Caracteristic pentru impreciziunea expunerii sale este faptul că Mill nu invocă principiul în acel punct al demonstrației în care el însuși îl consideră indispensabil; dar, după cum s-ar părea, adevărul său inductiv este destinat să reprezinte axioma lui Leibniz: „dacă înlocuim egalii prin egali, egalitatea rămîne neschimbată”. Dar, pentru a le putea

* Op. cit., Cartea a III-a, cap. XXIV, § 5.

intitula legi ale naturii, Mill conferă adevărurilor aritmetice un sens pe care acestea nu îl au. De exemplu*, el consideră că egalitatea $1=1$ ar putea fi falsă, deoarece o greutate de un funt nu cîntărește întotdeauna exact, atît cît alta. Însă propoziția $1=1$ nici nu afirmă aceasta.

Mill înțelege semnul $+$ în sensul că acesta ar exprima relația părților unui corp fizic sau ale unei grămezi față de întregul din care fac parte; însă nu acesta este sensul semnului de mai sus. $5+2=7$ nu semnifică faptul că turnînd 2 volume de lichid peste 5 volume de lichid obținem 7 volume de lichid; aceasta constituie o aplicație a propoziției, valabilă numai cu condiția ca să nu survină vreo modificare de volum, de exemplu ca urmare a unei reacții chimice. Mill confundă în permanență aplicațiile posibile ale unei propoziții aritmetice, aplicații care sînt adesea de natură fizică și presupun fapte observate, cu înseși propozițiile pur matematice. În numeroase aplicații, semnul plus poate avea, desigur, aparența de a corespunde modului de formare a unei grămezi; nu aceasta este însă semnificația lui; într-adevăr, în cadrul altor aplicații s-ar putea nici să nu fie vorba despre grămezi, agregate sau despre relația unui corp fizic cu părțile sale, spre pildă atunci cînd calculul poartă asupra unor evenimente. Firește că și aici putem vorbi despre părți, însă acest cuvînt nu mai este întrebuințat atunci în sens fizic sau geometric, ci în sens logic, ca atunci cînd vorbim despre asasinarea suveranilor ca despre o parte a asasinării în genere. Avem aici cazul subordonării logice. Tot astfel, nici adunarea nu corespunde în general vreunei relații fizice. În consecință, legile generale ale adunării nu pot fi nici ele legi ale naturii.

§ 10. Dar ele nu ar putea fi totuși adevăruri inductive? Cum s-ar putea concepe acest lucru? De la ce fapte ar trebui să pornim pentru a ne ridica la universal? De bună seamă, n-am putea porni decît de la formulele numerice.

* *Op. cit.*, Cartea a II-a, cap. VI, § 3.

Firește că astfel pierdem iar avantajul obținut prin definițiile numerelor individuale și de aceea vom avea să căutăm alte modalități de întemeiere a formulelor numerice. Chiar dacă ocolim această dificultate, nu tocmai neglijabilă, nu vom găsi totuși un teren propice inducției: într-adevăr, lipsește aici uniformitatea care în alte domenii face ca inducția să constituie un procedeu atît de sigur. Încă Leibniz*, la afirmația lui Philalèthe, după care:

„diferitele moduri ale numărului nu admit altă diferență decît aceea de mai mult sau mai puțin; ca atare, ele sînt moduri simple, ca cele ale spațiului“,

dădea următorul răspuns:

„Aceasta se poate spune despre timp și despre linia dreaptă, însă în nici un caz nu despre figuri și cu atît mai puțin despre numere, care nu sînt numai deosebite ca mărime dar și neasemănătoare. Un număr par poate fi divizat în două părți egale, în timp ce un număr impar nu poate fi astfel divizat. Trei și șase sînt numere triunghiulare, patru și nouă sînt pătrate, opt este cub etc., iar în cazul numerelor aceasta se întîmplă încă și mai des decît în cazul figurilor; într-adevăr, două figuri inegale pot fi perfect asemănătoare, însă în cazul numerelor aceasta nu se întîmplă niciodată“³⁵.

Fără îndoială, ne-am deprins să considerăm numerele ca fiind în mai multe privințe de același gen; motivul este însă numai acela că noi cunoaștem o mulțime de propoziții generale valabile pentru toate numerele. În cazul de față însă, noi trebuie să presupunem că nici o asemenea lege nu a fost încă descoperită. În fapt, ar fi greu să găsim un exemplu de raționament inductiv corespunzător cazului nostru. În alte împrejurări, ni se întîmplă în mod frecvent să aplicăm propoziția după care o poziție spațială oarecare și un moment arbitrar al timpului sînt în

* BAUMANN, *op. cit.*, vol. II, p. 39; ed. Erdmann, p. 243.

și pentru sine la fel de bune ca toate celelalte. Un efect se poate produce la fel de bine într-alt loc și timp, cu singura condiție ca toate celelalte împrejurări să rămână neschimbate. Dar în cazul numerelor acest principiu cade, întrucît numerele sînt spațiale și atemporale. În șirul numerelor, pozițiile nu sînt echivalente între ele, așa cum sînt echivalente punctele spațiului³⁶.

Totodată, numerele se raportează între ele cu totul altfel decît indivizii unei specii animale, să spunem; prin însăși natura sa, fiecare număr are o anumită poziție de ordine, este constituit într-un anume mod propriu și are specificitatea sa, care iese în relief în mod deosebit în cazul lui 0, 1 și 2. În altă parte, atunci cînd întemeiem prin inducție o propoziție asupra unei specii, noi dispunem de obicei de un întreg șir de proprietăți comune, date prin însăși definiția conceptului speciei. În cazul de față, însă, ar fi greu să găsim măcar o singură proprietate comună care să nu necesite ea însăși o demonstrație prealabilă.

Cazul nostru ar putea fi comparat cu cea mai mare ușurință cu cel de mai jos. Să presupunem că forăm un puț și că am observat o creștere constantă a temperaturii, proporțională cu adîncimea; totodată, pînă acum am întîlnit straturi de roci foarte variate. Este limpede că pornind numai de la observațiile făcute cu prilejul acestui foraj nu se poate conchide nimic asupra naturii rocilor mai adînci și că ar fi prematur să afirmăm că variația temperaturii după aceeași regulă va persista. Ce-i drept, conceptului „ceea ce se constată în cazul forajului continuu” i se subsumează atît cele observate pînă acum cît și cele aflate la o adîncime mai mare; dar în cazul de față, aceasta nu ne poate fi de folos. La fel de puțin ne ajută în cazul numerelor și faptul că ele se subsumează în totalitatea lor conceptului „ceea ce se obține prin mărirea continuă cu unu”. Între cele două cazuri trebuie trasată o distincție, întrucît straturile sînt numai descoperite, în timp ce prin mărirea repetată cu unu numerele sînt de-a dreptul create și determinate în întreaga lor

natură. Aceasta nu poate să însemne altceva decît că toate proprietățile unui anumit număr, de pildă numărul 8, sînt derivabile din modul în care acesta a fost generat prin mărirea cu unu. Dar astfel se admite principiul că proprietățile numerelor decurg din definițiile acestora și se deschide posibilitatea demonstrării legilor generale ale numerelor din modul lor comun de generare, în timp ce proprietățile speciale ale numerelor individuale ar urma să fie derivate din modul special în care ele au fost formate prin mărirea repetată cu unu³⁷. Tot astfel, în cazul straturilor terestre, acea proprietate care este determinată exclusiv de adîncimea la care sînt situate, și anume poziția lor relativă, poate fi dedusă pe baza acesteia însăși, fără a mai apela la inducție; dar o proprietate care nu este determinată astfel nu se poate descoperi nici prin inducție.

Putem presupune că însuși demersul inductiv nu poate fi justificat decît cu ajutorul propozițiilor generale ale aritmeticii — desigur, dacă prin inducție nu înțelegem o simplă habitudine. Aceasta din urmă nu are, firește, virtutea de a garanta adevărul. Demersul științific ghidat de norme obiective descoperă uneori într-o singură confirmare temeiul unei probabilități ridicate, în timp ce altele respinge o mie de concordanțe ca neavînd aproape nici o valoare; habitudinea, dimpotrivă, este determinată de numărul și intensitatea impresiilor și de circumstanțe subiective care nu au nici un drept să influențeze judecata noastră. Inducția trebuie să se reazeme pe teoria probabilităților, deoarece ea nu poate face nicicînd o propoziție mai mult decît probabilă. Este însă de neînțeles cum ar putea fi dezvoltată această teorie, dacă nu presupunem legi ale aritmeticii³⁸.

§ 11. Leibniz³⁹ consideră, dimpotrivă, că adevărurile necesare, cum sînt cele întîlnite în aritmetică, trebuie să aibă principii a căror demonstrare nu depinde de exemple

* BAUMANN, *op. cit.*, vol. II, pp. 13—14 (ediția Erdmann, pp. 195, 208—209).

și astfel nici de evidența simțurilor, deși fără existența simțurilor nimeni nu ar fi avut prilejul să le gîndească. „Întreaga aritmetică ne este înăscută și în mod virtual se găsește înăuntrul nostru“. Un alt pasaj* ne explică ceea ce înțelege Leibniz prin expresia „înăscut“: „Nu este adevărat că tot ceea ce se învață nu este înăscut. Adevărurile numerelor sînt în noi și nu mai puțin ele sînt învățate fie prin extragerea lor de la sursă, atunci cînd sînt învățate la modul demonstrativ (ceea ce arată tocmai faptul că ele sînt înăscute), fie...“³⁹.

Legile aritmeticii sînt oare sintetice a priori, sau sînt analitice?

§ 12. Considerînd opoziția între analitic și sintetic, se obțin patru combinații, dintre care însă una, și anume analitic *a posteriori*,

cade. Dacă optăm, împreună cu Mill, pentru *a posteriori*, nu ne mai rămîne așadar nici o alegere, încît ne mai rămîne să examinăm posibilitățile

sintetic *a priori*

și

analitic.

Kant se pronunță pentru prima. În acest caz, nu mai rămîne altă alternativă decît invocarea unei intuiții pure ca temei ultim de cunoaștere, deși în cazul de față este greu de spus dacă este vorba despre o intuiție spațială, temporală sau de orice alt gen. Baumann** este de acord cu Kant, deși din motive întrucîtva diferite. După Lipschitz***, de asemenea, propozițiile care afirmă independența numărului față de modalitatea numărării, precum și față de comutativitatea și asociativitatea termenilor sumei, derivă din intuiția interioară. Hankel**** fundează

* BAUMANN, *op. cit.*, vol. II, p. 38 (ed. Erdmann, p. 212).

** *Op. cit.*, vol. II, p. 669.

*** *Lehrbuch der Analysis*, vol. I, p. 1 (Bonn, 1877).

**** *Theorie der complexen Zahlensysteme*, p. 54 și 55.

teoria numerelor reale pe trei principii, cărora le conferă caracterul de *notiones communes*: „Explicația le face perfect evidente, ele sînt valabile pentru mărimile oricărui domeniu, conform intuiției pure a mărimii și, fără a pierde caracterul pe care-l au, pot fi transformate în definiții, dacă precizăm că prin adunare a mărimilor vom înțelege o operație care satisface aceste propoziții“. În ultima aserțiune există ceva neclar. Chiar dacă definiția ar putea fi construită, ea nu poate înlocui propozițiile fundamentale inițiale; într-adevăr, aplicarea definiției ar ridica iarăși problema dacă numerele sînt mărimi și dacă ceea ce obișnuim a numi adunare a numerelor este adunare în sensul acestei definiții. Pentru a răspunde, ar trebui să cunoaștem deja acele propoziții inițiale asupra numerelor. Mai departe, este șocantă expresia „intuiție pură a mărimii“. Dacă reflectăm la tot ce se numește mărime: numere, lungimi, suprafețe, volume, unghiuri, curburi, mase, viteze, forțe, luminozități, intensități ale curentului electric ș.a., înțelegem foarte bine modul cum ele se pot subsuma unui concept unic al mărimii; în schimb, expresiile „intuiție a mărimii“ și cu atît mai mult „intuiție pură a mărimii“ nu sînt admisibile. Eu nu pot admite nici măcar o intuiție a lui 100 000, și cu atît mai puțin a numărului în general, sau chiar a mărimii în general. Cu prea multă ușurință apellăm la intuiția interioară, ori de cîte ori nu putem invoca un alt temei. Ar fi recomandabil însă să nu pierdem chiar cu totul din vedere sensul cuvîntului „intuiție“.

În *Logica* sa (ed. Hartenstein, vol. VIII, p. 88), Kant definește intuiția după cum urmează: „Intuiția este o reprezentare individuală (*repraesentatio singularis*), conceptul este o reprezentare generală (*repraesentatio per notas communes*) sau reflexivă (*repraesentatio discursiva*).“

Aici nu se face mențiune despre raportarea la sensibilitate, deși aceasta este presupusă tacit în cadrul esteticii transcendente, și deși în absența ei intuiția nu poate constitui principiul de cunoaștere a judecăților sin-

tetice apriorice. În *Critica rațiunii pure* (ed. Hartenstein, III, p. 55), se spune: „Prin intermediul sensibilității deci ne sînt *date* obiecte, și ea singură ne procură *intuiții*“⁴⁰.

Prin urmare, în logică, sensul termenului „intuiție“ este mai larg decît în estetica transcendențială. În sens logic, am putea spune, eventual, că 100 000 este o intuiție; căci, ce-i drept, concept general nu este. Dar dacă luăm intuiția în acest sens, ea nu poate contribui la fundamentarea legilor aritmeticii.

§ 13. În genere, va fi indicat să nu supraestimăm înrudirea aritmeticii cu geometria. Am adus mai sus un pasaj din Leibniz, unde această idee este combătută. Luat în sine, un punct geometric nu poate fi distins în nici un mod de oricare alt punct; același lucru este valabil pentru drepte și plane. Abia atunci cînd intuiția cuprinde simultan mai multe puncte, drepte, plane, ele ajung să fie distinse. Faptul că în geometrie propozițiile generale trebuie derivate din intuiție este cît se poate de evident, întrucît punctele, dreptele, planele intuite nu au propriu-zis vreo particularitate și ca atare sînt autorizate să reprezinte întregul gen. În cazul numerelor, lucrurile stau altfel: fiecare număr își are particularitățile sale. Ca atare, nu se poate spune de la bun început în ce măsură un anumit număr poate reprezenta toate celelalte numere și unde intervine specificitatea sa.

§ 14. Compararea adevărurilor în raport cu domeniile pe care le guvernează pledează la rîndul ei împotriva naturii empirice și sintetice a legilor aritmetice.

Propozițiile empirice sînt valabile pentru realitatea fizică sau psihologică, adevărurile geometrice guvernează domeniul intuiției spațiale, indiferent dacă este vorba de ceva real sau de un produs al imaginației noastre. Viziunile delirante cele mai stranii, invențiile cele mai îndrăznețe ale mitului și poeziei, unde animalele vorbesc și stelele încremenesc, pietrele se prefac în oameni și oamenii se prefac în copaci, iar cel ce se cufundă în mlaștină iese de acolo trăgîndu-se singur de propriul său păr —

toate acestea, în măsura în care rămîn intuibile, ascultă totuși de axiomele geometriei. Numai gîndirea conceptuală se poate elibera într-un anume mod de sub dominația acestor axiome, atunci cînd ea postulează, să spunem, un spațiu cu patru dimensiuni sau cu o curbură pozitivă. Aceste cercetări nu sînt cîtuși de puțin inutile; ele părăsesc însă cu totul terenul intuiției. Dacă totuși se apelează și la ajutorul acesteia, ea este tot intuiția spațiului euclidian, unicul spațiu ale cărui configurații le putem intui. Numai că, atunci, intuiția nu va fi luată așa cum este ea, ci ca simbolizînd altceva; de exemplu, numim drept sau plan ceea ce este totuși intuit ca o curbă. Pentru țelurile gîndirii conceptuale putem postula întotdeauna contrariul unei axiome geometrice, fără să ajungem la autocontradicții, raționînd și trăgînd concluzii din asemenea ipoteze care contrazic intuiția. Această posibilitate ne arată că axiomele geometriei sînt independente unele față de altele și sînt totodată independente de legile originare ale logicii, ele fiind, așadar, sintetice⁴¹. Putem spune însă același lucru despre propozițiile fundamentale ale științei numerelor? Oare nu ajungem la o confuzie totală, dacă încercăm să negăm una din aceste propoziții? Ar mai fi posibil să gîndim în acest caz? Și oare însăși fundația aritmeticii nu este mai adîncă, în comparație cu orice știință empirică, inclusiv geometria? Adevărurile aritmetice guvernează domeniul a tot ce este numărabil, adică domeniul cel mai cuprinzător, care înglobează nu numai realul, nu numai intuitivul, ci și tot ceea ce poate fi gîndit. De aceea, este firesc ca legile numerelor să se afle într-o legătură intimă cu legile gîndirii.

§ 15. Afirmațiile lui Leibniz pot fi interpretate numai în favoarea caracterului analitic al legilor numărului; faptul era de prevăzut, deoarece pentru Leibniz aprioricul coincide cu analiticul. Astfel, el afirmă* că foloasele pe care le aduce algebra sînt împrumutate de la o artă mult

* BAUMANN, *op. cit.*, vol. II, p. 56 (ed. Erdmann, p. 424).

mai înaltă, și anume aceea a adevăratei logici⁴². În alt loc*, el compară adevărurile necesare și contingente cu mărimile comensurabile și incommensurabile și opinează că adevărurile necesare permit o demonstrație sau o reducere la identități⁴³. Totuși, aceste declarații își pierd din greutatea lor, dat fiind că Leibniz înclină să privească toate adevărurile ca fiind demonstrabile⁴⁴: „... orice adevăr își are proba sa *a priori*, scoasă din noțiunea termenilor, deși nu este totdeauna în puterea noastră să ajungem la această analiză”⁴⁴. Pe de altă parte, comparația cu comensurabilitatea și incommensurabilitatea mărimilor ridică desigur o nouă barieră de netrecut, cel puțin pentru noi, între adevărurile necesare și cele contingente.

Foarte hotărît se pronunță în favoarea caracterului analitic al legilor numărului W. Stanley Jevons⁴⁵: „Algebra este o logică superior dezvoltată, iar numărul doar un caracter distinctiv logic”⁴⁵.

§ 16. Dar această concepție comportă și ea anumite dificultăți. E cu putință ca arborele științei numărului, acest arbore tot mai înalt, tot mai ramificat și în continuă creștere să-și aibă rădăcinile în simple identități? Pe de altă parte, cum ajung formele goale ale logicii să-și reverse în afară un asemenea conținut?

După opinia lui Mill: „Teoria potrivit căreia, printr-o manipulare iscusită a limbajului, putem descoperi fapte și dezvoltăm procesele ascunse ale naturii contrazice într-atîta bunul-simț, încît cine ajunge să creadă aceasta trebuie să fi făcut deja unele progrese în materie de filosofie”⁴⁶.

Aceasta este adevărat, cu condiția ca în cursul iscusitei manipulări să nu gîndim deloc. Mill critică aici un anumit gen de formalism care numai cu greu și-ar găsi un apărător. Oricine folosește cuvinte sau simboluri mate-

* *Ibidem*, p. 57 (ed. Erdmann, p. 83).

** *Ibidem* (ed. Pertz, vol. II, p. 55).

*** *The Principles of Science*, London, 1879, p. 156.

matice pretinde că ele înseamnă ceva și nimeni nu va aștepta ca să rezulte ceva cu sens din simboluri goale. Un matematician poate să efectueze însă calcule complicate, fără ca să înțeleagă prin semnele sale ceva intuitiv, perceptibil prin simțuri. Aceasta nu face ca semnele respective să fie lipsite de sens; conținutul acestor semne trebuie însă deosebit de semnele înseși, chiar dacă acest conținut nu ar putea fi conceput decît tot cu ajutorul semnelor. Ne dăm seama că pentru același lucru puteau fi instituite alte semne. Este suficient să știm cum trebuie tratat logic conținutul sensibilizat în semne, iar dacă urmărim aplicarea calculelor în fizică mai trebuie să știm cum se efectuează trecerea la fenomene. Dar sensul real al propozițiilor nu trebuie văzut într-o asemenea aplicație. Universalitatea propozițiilor se pierde în mare măsură cu acest prilej, în joc intrînd un element particular, care variază de la o aplicație la alta⁴⁷.

§ 17. Oricît am diminua rolul deducției, nu se poate contesta că legile stabilite prin inducție nu sînt suficiente. Din aceste legi trebuie derivate propoziții noi, care nu sînt cuprinse în nici una din acele legi luate fiecare în parte. Noile propoziții sînt într-un fel cuprinse în toate aceste legi luate împreună, dar aceasta nu ne scutește de efortul de a le explicita, desprinzîndu-le și dîndu-le o formulare independentă. În felul acesta se deschide următoarea posibilitate. În loc de a conecta în mod direct lanțul deducțiilor cu un anumit fapt, putem lăsa acest fapt acolo unde se află, introducînd conținutul său ca o condiție. Înlocuind astfel toate faptele dintr-un șir de gînduri prin condiții, rezultatul se va prezenta sub forma dependenței unei consecințe de un șir întreg de condiții. Acest adevăr ar fi stabilit numai prin gîndire sau, ca să folosim expresia lui Mill, prin manipularea iscusită a limbajului. Nu este exclus ca legile numărului să fie de acest gen. Atunci ele ar fi judecări analitice, cu toate că de regulă ele nu ar fi descoperite numai prin intermediul gîndirii; într-adevăr, ceea ce ne interesează aici nu este modul în care au fost găsite, ci genul de teme pe care se

sprijină demonstrația; sau, după cum spune Leibniz*, „nu este vorba aici despre istoria descoperirilor noastre, care diferă de la un om la altul, ci despre conexiunea și ordinea naturală, mereu aceeași, a adevărurilor“. Observației i-ar reveni atunci sarcina de a stabili, în ultimă instanță, dacă condițiile cuprinse în legile astfel întemeiate sînt satisfăcute. În cele din urmă vom ajunge în aceeași situație în care ne-am fi aflat dacă am fi legat direct lanțul deducțiilor de faptele observate. Dar procedeul indicat aici este preferabil în numeroase cazuri, deoarece el conduce la o propoziție universală a cărei aplicabilitate nu este limitată neapărat la faptele aflate în prealabil la dispoziția noastră. Adevărurile aritmeticii s-ar raporta în acest caz la adevărurile logicii în același mod în care teoremele geometriei se raportează la axiomele geometriei. Fiecare ar concentra în sine un șir întreg de raționamente în vederea unei utilizări ulterioare, avantajul fiind acela că nu mai avem nevoie să efectuăm raționamentele separate, unul cite unul, ci putem exprima simultan rezultatul întregului șir**. Dacă este așa, atunci, într-adevăr, grație dezvoltării prodigioase a teoriilor aritmetice și diverselor lor aplicații, disprețul atît de răspîndit față de judecățile analitice, precum și legenda sterilității logicii pure se vor spulbera de la sine.

Dacă această concepție — care nu a fost exprimată acum pentru întia oară — ar putea fi elaborată în amănunt cu o rigoare care să înlăture cel mai mic dubiu, rezultatul, după părerea mea, nu ar fi nicidecum lipsit de importanță⁴⁸.

* *Nouveaux Essais*, IV, § 9; ed. Erdmann, p. 360.

** Este semnificativ că și MILL (*op. cit.*, Cartea a II-a, cap. VI, § 4) pare să exprime această opinie. Simțul sănătos al lui Mill învinge chiar, din cînd în cînd, părerea sa preconcepută în favoarea empiricului. Dar aceeași părere preconcepută îl readuce la confuzia inițială, făcîndu-l să confunde aplicațiile fizice ale aritmeticii cu aritmetica însăși. Mill pare a nu-și da seama de faptul că o judecată ipotetică poate fi adevărată chiar și atunci cînd condiția nu este adevărată.

II. Opiniile unor autori asupra conceptului de număr

§ 18. Îndreptîndu-ne acum atenția asupra obiectelor originare ale aritmeticii, facem deosebirea între numerele individuale, ca 3, 4 și așa mai departe, și conceptul general de număr. Or, noi am văzut deja că numerele individuale sînt derivate în mod optim în felul propus de către Leibniz, Mill, H. Grassmann și alții — adică plecînd de la numărul unu și de la adunarea cu unu — dar că aceste definiții rămîn incomplete atîta timp cît numărul unu și adunarea cu unu rămîn ele însele neexplicate. Am văzut că pentru a deriva formulele numerice din aceste definiții trebuie să facem apel la propoziții generale. Dar, tocmai datorită caracterului lor general, asemenea legi nu pot decurge din definițiile numerelor individuale, ci numai din conceptul general de număr. Vom supune acum însuși acest concept unui examen mai amănunțit. Ne putem aștepta atunci ca atît numărul unu cît și adunarea cu unu să reclame o explicație, astfel încît definiția fiecărui număr în parte va trebui la rîndul ei completată.

§ 19. Aici, aș dori să obiectez de-a dreptul împotriva încercării de a înțelege numărul în mod geometric, ca raport numeric al lungimilor sau suprafețelor. Evident, s-a crezut că numeroasele aplicații ale aritmeticii în geometrie vor fi facilitate prin raportarea cît mai intimă a primelor elemente înseși.

Newton* pretinde să se înțeleagă prin număr nu atît o mulțime de unități cît raportul abstract al unei mărimi oarecare față de o altă mărime de același gen care este luată ca unitate⁴⁹. Se poate admite că prin aceasta este descris într-un mod adecvat numărul, în acel sens larg în care el înglobează totodată fracțiile și numerele iraționale; dar în acest caz conceptele de mărime și de raport între mărimi sînt presupuse. Ca atare, se pare că o definire a numărului în sens restrîns, a numărului cardinal

* BAUMANN, *op. cit.*, vol. I, p. 475 [*Arithmetica Universalis*, vol. I, cap. II, 3].

[Anzahl] nu ar fi inutilă; într-adevăr, pentru a defini egalitatea a două rapoarte între lungimi, Euclid folosește noțiunea de multiplu egal; or, multiplul egal revine tot la o identitate numerică⁵⁰. S-ar putea totuși ca egalitatea rapoartelor între lungimi să fie definibilă independent de conceptul de număr. Dar și atunci am rămâne totuși în necunoștință de cauză asupra relației în care numărul definit geometric în acest mod s-ar afla față de numărul din viața de toate zilele. Acesta din urmă ar fi atunci cu totul despărțit de știință. Or, de bună seamă, aritmeticii îi putem pretinde ca să ne ofere neapărat premisele oricărei aplicări a numărului, chiar dacă aplicarea însăși nu cade în sarcina aritmeticii. Pînă și socotitul obișnuit trebuie să-și afle în știință întemeierea procedurilor sale. Dar se ridică întrebarea dacă aritmetica însăși se poate mulțumi cu un concept geometric al numărului, atunci cînd ne referim la numărul rădăcinilor unei ecuații, la numărul numerelor prime cu un număr și mai mici decît el, sau la alte cazuri asemănătoare. În schimb, numărul care răspunde la întrebarea „cit?“, „cîte?“, este capabil să indice și cîte unități sînt cuprinse într-o lungime. Calculul cu numere negative, raționale și iraționale poate fi redus la calculul cu numerele naturale. Nu este însă exclus ca Newton să fi înțeles prin mărimi — numărul fiind definit ca raport între mărimi — nu numai mărimi geometrice, ci și mulțimi. Dar în acest caz definiția sa nu este utilizabilă în scopul nostru, deoarece expresia „raportul unei mulțimi față de unitatea de mulțime“ nu oferă mai multă informație decît expresia „număr prin care este determinată o mulțime“.

§ 20. Prima chestiune va fi acum aceea dacă numărul poate fi definit. Hankel* declară că nu: „Simplitatea principală a noțiunii de instituire [Setzung] nu îngăduie să se definească ceea ce înseamnă a gîndi sau a institui un obiect o dată, de două ori, de trei ori...“. Aici este însă mai puțin vorba despre instituire decît despre o dată, de

* *Theorie der complexen Zahlensysteme*, p. 1.

două ori, de trei ori. Dacă s-ar putea defini acestea din urmă, faptul că instituirea nu poate fi definită ne-ar îngrijora prea puțin. Leibniz înclină să considere numărul ca o idee adecvată, sau aproximativ adecvată, adică o idee atît de clară încît tot ce se află în cuprinsul ei este de asemenea clar.

Dacă lumea înclină să considere că numărul nu poate fi definit, acest fapt se datorește mai degrabă eșecului tentativelor de a-l defini, decît existenței unor temeiuri ale indefinibilității deduse din natura lucrului însuși.

*Este oare numărul o proprietate a lucrurilor exterioare?*⁵¹

§ 21. Să încercăm cel puțin a indica locul numărului printre conceptele noastre. În cadrul limbii, numerele apar de cele mai multe ori în formă adjectivală și în construcție atributivă, la fel ca și cuvintele: tare, greu, roșu, care semnifică proprietăți ale lucrurilor exterioare⁵². În mod firesc, se ridică întrebarea dacă fiecare număr în parte ar urma să fie conceput în mod asemănător și dacă, drept urmare, conceptul numărului ar putea fi alăturat, de pildă, celui al culorii.

S-ar părea că aceasta este opinia lui M. Cantor⁵³, atunci cînd el caracterizează matematica drept o știință empirică, întrucît ea își trage obirșia din considerarea lucrurilor lumii exterioare. Numărul ar apare numai prin abstracție de la obiecte⁵⁴.

După E. Schröder⁵⁵ numărul copiază realitatea prin aceea că unitățile [Einheiten] sînt înfățișate prin intermediul unu-urilor. Acest proces, Schröder îl numește abstragerea numărului. Copierea prezintă unitățile numai sub raportul frecvenței lor, toate celelalte determinări ale lucrurilor

* *Grundzüge einer Elementarmathematik*, p. 2, § 4. Similar, LIPSCHITZ, *Lehrbuch der Analysis*, Bonn, 1877, p. 1.

** *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra*, Leipzig, 1873, pp. 6, 10 și 11.

— de pildă culoarea și forma — fiind lăsate la o parte. În cazul de față, frecvența nu este decît o altă denumire a numărului. Prin urmare, Schröder pune frecvența sau numărul pe același plan cu culoarea și forma, considerînd-o drept o proprietate a lucrurilor.

§ 22. Baumann* respinge ideea că numărul ar fi un concept desprins din lucrurile exterioare: „Căci lucrurile exterioare nu ni se înfățișează ca unități stricte; ele se prezintă ca grupuri delimitate sau puncte senzoriale, pe care însă avem libertatea de a le privi iarăși ca pluralități”. Într-adevăr, deși eu nu sînt în stare să modific cîtuși de puțin culoarea sau duritatea unui lucru numai pe baza modului în care îl gîndesc, eu pot gîndi *Iliada* ca pe un unic poem, ca 24 de cinturi sau ca un mare număr de versuri. Și oare nu vorbim despre 1000 de frunze ale unui copac într-un sens cu totul diferit de acela în care vorbim despre frunzele sale verzi? Culoarea verde o atribuim fiecărei frunze în parte, dar nu tot astfel stau lucrurile cu numărul 1000. Putem cuprinde toate frunzele copacului sub denumirea de frunziș. Frunzișul este și el verde, dar nu este numărul 1000. Dar atunci cui îi revine propriu-zis proprietatea 1000? Aproape s-ar părea că ea nu aparține nici fiecărei frunze în parte și nici totalității; nu cumva ea propriu-zis nici nu aparține cîtuși de puțin lucrurilor din lumea exterioară? Dacă îi dau cuiva o piatră și îi spun: stabilește ce greutate are — prin aceasta eu i-am definit integral obiectul cercetării sale. Dar dacă îi înmînez un pachet de cărți de joc, spunîndu-i: stabilește numărul respectiv, — persoana în cauză nu știe dacă eu doresc să aflu numărul cărților, cel al jocurilor complete sau, să zicem, cel al atuurilor de la o partidă de skat. Prin faptul că i-am pus pachetul de cărți în mînă eu nu i-am determinat încă în mod complet obiectul cercetării sale; mai trebuie să adaug un cuvînt: carte de joc, partidă, atu⁵⁵. De asemenea, nu se poate afirma nici că diferitele numere se află aici unul lîngă altul, așa cum s-ar afla di-

* Cp. cit., vol. II, p. 669.

feritele culori. Eu pot arăta fiecare întindere colorată în parte, fără a pronunța un cuvânt, dar nu pot face aceasta în cazul fiecărui număr în parte. Dacă un anumit obiect îl pot numi cu egală îndreptățire verde și roșu, aceasta înseamnă că obiectul respectiv nu este suportul real al verdelui. Pe acesta îl am abia într-o întindere care este în întregime verde. Tot astfel, un obiect căruia îi pot atribui cu egală îndreptățire numere diferite nu poate fi suportul real al unui număr⁵⁶.

O deosebire esențială între culoare și număr rezidă, așadar, în faptul că culoarea albastră a unei întinderi aparține acesteia independent de bunul nostru plac. Culoarea albastră este capacitatea de a reflecta anumite raze de lumină și a absorbi într-o măsură mai mare sau mai mică alte raze, iar în această privință modul nostru de a concepe lucrurile nu poate determina nici cea mai mică modificare. Dimpotrivă, eu nu pot spune că pachetului de cărți de joc îi revine în sine numărul 1 sau numărul 100 sau oricare alt număr; pot spune, cel mult, că numărul respectiv îi revine în raport cu modul nostru arbitrar de a concepe⁵⁷ și, chiar în acest caz, nu în sensul că i-am putea atribui numărul pur și simplu ca un predicat. Ceea ce noi decidem a numi joc complet constituie, evident, o stipulare arbitrară, în care pachetul de cărți de joc nu are un cuvânt de spus. Întrucât noi însă îl considerăm sub acest raport, vom descoperi, eventual, că îl putem numi două jocuri complete. Dacă cineva nu ar ști ce se numește joc complet, ar găsi, de bună seamă, un oarecare număr, diferit de numărul doi, pentru acest pachet.

§ 23. La întrebarea: cui îi aparține ca proprietate numărul, Mill* dă următorul răspuns:

„Numele unui număr denotă o proprietate ce aparține acelui agregat de lucruri pe care îl desemnăm prin acest nume; iar această proprietate este modul caracteristic în

* *Op. cit.*, Cartea a III-a, cap. XXIV, § 5.

care agregatul este compus din părți și poate fi separat în părți“.

Aici o primă eroare este folosirea articolului hotărît din expresia „modul caracteristic“, întrucît există moduri foarte diferite în care un agregat poate fi separat în părți și nu se poate spune că numai unul din acestea ar fi cel caracteristic. De exemplu, o legătură de paie poate fi separată în părțile sale prin tăierea în două a tuturor paielor sale sau prin desfacerea sa, pai cu pai, sau făcînd din ea două legături. Mai departe, oare o grămăjoară de o sută boabe de nisip este compusă în exact același fel ca o legătură de 100 paie? Și totuși, avem de-a face cu același număr. Numeralul „unu“ din expresia „un pai“ nu exprimă însă modul în care acest pai este compus din celule sau molecule. O dificultate și mai mare este suscitată de numărul 0. Mai departe, este oare în genere obligatoriu ca paiele să formeze o legătură, pentru ca să poată fi numărate? Oare este necesar să organizăm o întrunire a tuturor orbilor din Germania pentru ca expresia „Numărul orbilor din Germania“ să aibă sens? O mie de boabe de grîu încetează să mai fie o mie de boabe de grîu după ce-au fost treierate? Și oare există în sensul propriu al cuvîntului agregate de demonstrații ale unei teoreme sau agregate de evenimente? Și totuși, acestea pot fi de asemenea numărate. Totodată, este indiferent dacă evenimentele au loc simultan sau la o distanță de milenii.

§ 24. Ajungem astfel la un alt motiv pentru a nu pune numărul pe același plan cu culoarea și duritatea: aplicabilitatea sa mult mai largă.

Mill* consideră că adevărul după care ceea ce se compune din părți se compune din părți ale acestor părți este valabil pentru toate fenomenele naturii, întrucît toate acestea pot fi numărate. Dar oare nu pot fi numărate și multe alte lucruri? Locke** spune: „Numărul se aplică

* *Op. cit.*, Cartea a III-a, cap. XXIV, § 5.

** BAUMANN, *op. cit.*, vol. 1, p. 409.

la oameni, îngeri, acțiuni, gânduri — la tot ceea ce ori există, ori poate fi imaginat⁵⁸. Leibniz* respinge concepția scolasticilor după care numărul ar fi inaplicabil la lucrurile corporale și caracterizează numărul ca o anume figură incorporeală, apărută prin reunirea unor lucruri absolut oarecari, de exemplu prin reunirea lui Dumnezeu, a unui inger, a unui om, a mișcării, care, toate la un loc, sînt patru. De aceea, crede el, numărul este ceva absolut universal, aparținînd metafizicii⁵⁹. Într-un alt pasaj**, el spune: „Ceea ce nu are forță și putere nu poate fi cîntărit; ceea ce nu are părți nu poate avea vreo măsură; dar nu există nimic ce nu ar admite numărul. Așadar, numărul este, ca să spunem așa, figura metafizică”⁶⁰.

Ar fi într-adevăr uimitor dacă o proprietate abstrasă din lucrurile exterioare ar putea fi transpusă fără vreo modificare de sens asupra unor evenimente, reprezentări și concepte. Ar fi ca și cum am vrea să vorbim despre un eveniment fuzibil, o reprezentare albastră, un concept sărat sau o judecată tare.

Este absurd ca ceea ce este nesenzorial să manifeste ceva ce prin însăși natura sa este senzorial. Atunci cînd privim o suprafață albastră, obținem o impresie specifică ce corespunde cuvîntului „albastru”; această impresie o recunoaștem iarăși atunci cînd contemplăm o altă suprafață albastră. Dacă am presupune, în mod analog, că atunci cînd privim un triunghi, există ceva senzorial care corespunde cuvîntului „trei”, ar trebui să regăsim acest element senzorial și în cazul a trei concepte; așadar, ceva non-senzorial ar avea în sine însăși ceva senzorial. Fără îndoială, putem admite că o impresie senzorială de un anume gen corespunde cuvîntului „triunghiular”, dar atunci acest cuvînt trebuie luat ca un întreg indivizibil⁶¹. Noi nu vedem în mod imediat pe treiul de acolo; în schimb vedem ceva ce poate declanșa o activitate intelectuală

* BAUMANN, *op. cit.*, vol. II, p. 56.

** *Op. cit.*, p. 2.

care conduce la o judecată în cadrul căreia intervine numărul 3^{62} . Căci, într-adevăr, cum ajungem să percepem, de pildă, numărul figurilor silogistice stabilite de Aristotel? Le percepem cu ochii? Vedem, cel mult, anumite semne care reprezintă aceste figuri de raționament, dar nu le vedem pe acestea însele. Cum s-ar putea să vedem numărul acestora, dacă ele însele rămân invizibile? Dar poate că cineva își închipuie că este de ajuns să vedem semnele; numărul lor este identic cu numărul figurilor silogistice. Dar cum ajungem să știm acest lucru? Pentru aceasta se cere ca noi să fi stabilit deja într-un alt mod ultimul număr. Sau poate că propoziția „numărul figurilor silogistice este patru” constituie doar o altă expresie pentru „numărul semnelor figurilor silogistice este patru”? Cîtuși de puțin! Despre semne nu trebuie să afirmăm nimic; nimeni nu vrea să audă ceva despre ele, în cazul cînd o proprietate a acestora nu manifestă totodată o proprietate a ceea ce ele desemnează⁶³. Totodată, intrucît unul și același lucru poate fi simbolizat în diferite moduri, fără ca prin aceasta să păcătuim împotriva logicii, nici nu se mai cere ca numărul semnelor să coincidă cu numărul celor desemnate.

§ 25. În timp ce pentru Mill numărul constituie ceva de ordin fizic, pentru Locke și Leibniz el subzistă numai în idee. E adevărat că, după cum spune Mill*, două mere sînt fizic distincte de trei mere, la fel cum doi cai sînt fizic distincți de un singur cal, constituind în mod vizibil și tangibil un fenomen distinct**. Dar putem oare conchide pe această bază că însușirea de a fi doi, însușirea de a fi trei constituie ceva de ordin fizic? Una pereche de ghetete poate constitui același fenomen vizibil și tangibil ca și două ghetete. Avem aici o diferență de număr care nu

* *Op. cit.*, Cartea a III-a, cap. XXIV, § 5.

** Strict vorbind, ar trebui să adăugăm: cu condiția ca el să fie în genere un fenomen. Dacă însă cineva are un cal în Germania și unul în America (și nu mai are un alt cal), atunci el posedă doi cai. Aceștia nu formează însă un fenomen; numai fiecare dintre acești cai în parte ar putea fi astfel caracterizat.

corespunde unei diferențe fizice;⁶⁴ într-adevăr, doi și una pereche nu sînt nicidecum identice, cum Mill pare să-și închipuie într-un mod atît de ciudat. Și, în sfîrșit, cum este cu putință ca două concepte să fie fizic distincte de trei concepte?

Așa cum spune Berkeley*: „Trebuie să avem în vedere că numărul nu este ceva fix și stabilit, nu este existent real în lucrurile înseși. El este într-un totu o creație a cugetului care privește fie o idee în sine, fie o combinație de idei căreia îi dă un nume, făcînd-o astfel să treacă drept o unitate. În funcție de modul variat în care cugetul combină ideile sale, variază și unitatea, iar așa cum variază unitatea, variază și numărul, care este numai o colecție de unități. Spunem că o fereastră este una, un horn este unul; și totuși o casă care are multe ferestre și multe hornuri este una iar multe case ajung să facă un oraș“⁶⁵.

*Este numărul ceva subiectiv?*⁶⁶

§ 26. Această orientare de idei poate conduce cu ușurință la considerarea numărului drept ceva subiectiv. S-ar părea că modul în care numărul apare înăuntrul nostru ar putea oferi o explicație a naturii sale. Am ajunge atunci la o investigație de ordin psihologic. Într-adevăr, iată ce afirmă Lipschitz în acest sens**:

„Acel ce dorește să cuprindă un ansamblu de lucruri va începe cu un anumit lucru determinat și va continua prin a adăuga mereu cîte un lucru nou celor anterioare“. Această caracterizare pare a fi mult mai adecvată pentru descrierea modului în care căpătăm, să spunem, intuiția unei constelații, decît pentru formarea numărului. Intenția de a cuprinde un ansamblu este irelevantă, căci cu

* BAUMANN, *op. cit.*, vol. II, p. 428.

** *Lehrbuch der Analysis*, p. 1. Pornesc de la premisa că Lipschitz are în vedere un fenomen interior.

greu s-ar putea spune că o turmă devine mai ușor de cuprins dacă știm din câte capete este alcătuită.

O asemenea descriere a proceselor lăuntrice care preced emiterea unei judecăți numerice nu poate în nici un caz — nici măcar într-un context mai adecvat — să înlocuiască o definiție propriu-zisă a conceptului. Ea nu va putea fi invocată niciodată în demonstrarea unei propoziții aritmetice; ea nu ne permite să aflăm vreo proprietate a numerelor. Într-adevăr, numărul nu este un obiect al psihologiei sau un produs al fenomenelor psihice mai mult decât Marea Nordului, să spunem⁶⁷. Obiectivitatea Mării Nordului nu este afectată cu nimic de faptul că putem decide în mod arbitrar care parte a suprafeței totale acoperită de apă a Pământului o vom delimita spre a-i atribui numele „Marea Nordului“. Acesta nu este un motiv care să ne facă să cercetăm Marea Nordului prin metode ale psihologiei. Tot astfel, numărul este și el ceva obiectiv. Spunînd: „Marea Nordului are o suprafață de 10 000 mile pătrate“, noi nu ne referim nici prin „Marea Nordului“, nici prin „10 000“ la o stare sau la un fenomen din forul nostru lăuntric, ci, dimpotrivă, afirmăm ceva absolut obiectiv, ceva independent de reprezentările noastre și de alte lucruri de același gen. Dacă cu un alt prilej am vrea să delimităm într-un mod diferit marginile Mării Nordului sau să înțelegem altceva prin „10 000“, conținutul care înainte era adevărat nu ar deveni prin aceasta fals; dar locul unui conținut adevărat l-ar putea lua un conținut fals, ceea ce nu anulează însă în nici un caz adevărul primului.

Atunci cînd un botanist indică numărul petalelor unei flori, el înțelege să afirme ceva tot atît de factual ca atunci cînd el indică culoarea aceleiași flori⁶⁸. Nici una dintre aceste caracteristici nu depinde mai mult decât cealaltă de bunul nostru plac. Așadar, o anumită asemănare între număr și culoare există, dar ea nu rezidă în faptul că ambele pot fi percepute senzorial în lucrurile exterioare, ci în faptul că ambele sînt obiective.

Eu fac o distincție între ceea ce este obiectiv și ceea ce

este imediat sesizabil, spațial sau real. Axa Pământului și centrul de gravitate al sistemului solar sînt obiective, dar eu n-aș spune că sînt reale, așa cum real este Pământul însuși. Vorbim adesea despre ecuator ca despre o linie imaginară; ar fi însă fals să spunem că este o linie imaginată; ea nu provine din gîndire, nu este rezultatul unui proces psihic, gîndirea nu face decît să o recunoască, să o conceapă ca atare. Dacă a fi recunoscut ar însemna a fi generat, atunci nu am putea afirma nimic pozitiv despre ecuator, referitor la perioada care precede această pretinsă geneză⁶⁹.

Potrivit lui Kant, spațiul aparține aparenței [fenomenalității]. S-ar putea ca altor ființe raționale spațiul să li se înfățișeze cu totul altfel decît ni se înfățișează nouă. Mai mult, nu putem ști nici măcar dacă spațiul îi apare unui om la fel cum îi apare altuia; într-adevăr, noi nu putem pune intuiția spațială a unui om lîngă intuiția altuia, spre a le compara. Și totuși, aici este conținut ceva obiectiv; toți recunosc aceleași axiome geometrice, fie și numai prin faptă, și sînt obligați la aceasta spre a se orienta în univers⁷⁰. Obiectiv aici este elementul logic, conceptual, judicabil, care se lasă exprimat în cuvinte⁷¹. Ceea ce este pur intuitiv nu este comunicabil. Spre a clarifica acest punct, să ne imaginăm două ființe raționale care pot intui numai proprietățile și relațiile proiective: situarea a trei puncte pe o dreaptă, a patru puncte într-un plan și așa mai departe; ceea ce uneia îi apare ca punct poate să-i apară alteia drept plan, și viceversa. Ceea ce pentru una dintre ființe este linia care unește două puncte, poate fi pentru cealaltă linia după care se intersectează două plane, și așa mai departe, potrivit aceleiași corespondențe duale. În aceste condiții, cele două ființe raționale s-ar putea înțelege foarte bine între ele, fără a deveni vreodată conștiente de deosebirea dintre intuițiile lor, întrucît în geometria proiectivă orice teoremă are duala sa; divergențele de evaluare estetică⁷² nu ar constitui un indiciu cert. În privința tuturor teoremelor geometrice, cele două ființe raționale s-ar găsi în deplin acord, numai

că fiecare ar traduce altfel cuvintele în intuiții proprii. Cuvîntului „punct“, de exemplu, una din ființe i-ar asocia o intuiție, iar cealaltă o altă intuiție. Așadar, putem susține mai departe că pentru cele două ființe raționale acest cuvînt semnifică ceva obiectiv, numai că nu este permis să înțelegem prin această semnificație elementul specific al intuițiilor lor. Iar în acest sens axa Pămîntului este de asemenea obiectivă⁷³.

De obicei, „alb“ ne face să ne gîndim la o anumită senzație care, natural, este întru totul subiectivă; dar, după părerea mea, în însăși vorbirea obișnuită se manifestă adesea un sens obiectiv. Spunînd că zăpada este albă, avem intenția să exprimăm o însușire obiectivă pe care o constatăm la lumina obișnuită a zilei prin intermediul unei anumite senzații. Dacă asupra zăpezii cade o lumină colorată, în procesul judecării vom lua în considerație acest fapt. Vom spune, bunăoară: zăpada a p a r e acum roșie, dar ea e s t e albă. Pînă și daltonistul poate vorbi despre roșu și verde, cu toate că în senzațiile sale el nu distinge aceste culori. El ajunge să recunoască distincția datorită faptului că alții o fac sau, eventual, pe baza unui experiment fizic. Așadar, adesea nici termenii pentru culori nu desemnează senzația noastră subiectivă, despre care nu putem ști dacă concordă cu senzația altcuiva — este evident, într-adevăr, că folosirea unei aceleiași denumiri nu oferă nici o garanție în acest sens —, ci desemnează o însușire obiectivă. Înțeleg deci prin obiectivitate o independență față de senzația, intuiția și imaginația noastră, o independență față de formarea unor imagini lăuntrice pe baza rememorării senzațiilor anterioare, dar nu o independență față de rațiune; într-adevăr, a răspunde la întrebarea ce sînt lucrurile independent de rațiune ar însemna să judecăm fără a judeca, să spălăm un lucru fără să-l udăm⁷⁴.

§ 27. Din acest motiv, nu mă pot declara de acord nici cu Schloemilch^{*75} care afirmă că numărul este re-

* *Handbuch der algebraischen Analysis*, p. 1.

prezentarea poziției unui obiect înăuntrul unui șir*. Dacă numărul ar fi o reprezentare, atunci aritmetica ar fi psihologie. Dar ea este tot atît de puțin psihologie pe cît este astronomia! La fel cum aceasta din urmă nu studiază reprezentările planetelor, ci înseși aceste planete, tot astfel nici obiectul aritmeticii nu este o reprezentare. Dacă numărul doi ar fi o reprezentare, ar fi mai întîi numai propria mea reprezentare. Reprezentarea pe care o are altcineva este deja, luată ca atare, o altă reprezentare. Am putea avea atunci milioane întregi de numere doi. Ar trebui să spunem: doi al meu, doi al tău, un număr doi, toate numerele doi. Dacă acceptăm reprezentări latente sau inconștiente, am avea de asemenea numere doi inconștiente care ulterior ar redeveni conștiente. Pe măsura apariției unor noi adulți ar apare mereu alți doi, și cine știe dacă de-a lungul mileniilor aceștia nu s-ar schimba pînă acolo încît doi ori doi să facă cinci! Dar, în pofida acestui fapt, ar fi îndoielnic să existe, așa cum se consideră

* Împotriva acestei afirmații se mai poate obiecta că, dacă este așa, ar trebui întotdeauna să avem una și aceeași reprezentare asupra poziției ori de cîte ori intervine unul și același număr, ceea ce este evident fals. Dacă autorul ar fi vrut să înțeleagă prin reprezentare o idee obiectivă, atunci considerațiile mele de mai jos ar fi fost lipsite de obiect; dar în acel caz ce deosebire ar mai exista între reprezentarea unei poziții și poziția însăși?

Reprezentarea în sens subiectiv ascultă de legile psihologice ale asociației; ea are o natură senzorială, imagistică. Reprezentarea în sens obiectiv aparține logicii și este în esență nesenzorială, deși cuvîntul care desemnează o reprezentare obiectivă poartă adesea cu sine și o reprezentare subiectivă, care nu constituie însă semnificația sa⁷⁶. Adesea, reprezentarea subiectivă diferă, după cum se poate dovedi, de la un om la altul, pe cînd cea obiectivă este aceeași pentru toți. Reprezentările obiective se pot împărți în obiecte și concepte. Pentru a evita orice confuzie, voi folosi cuvîntul „reprezentare” numai în sensul subiectiv. Asociind acestui cuvînt ambele semnificații, Kant a conferit doctrinei sale o coloratură eminamente subiectivă, idealistă, îngreunînd astfel descifrarea adevăratei sale opinii. Distincția trasată aici este tot alîl de întemeiată ca și aceea dintre logică și psihologie. Ar fi de dorit ca acestea să fie întotdeauna separate cît se poate de riguros!

de obicei, infinit de multe numere. Poate că în acest caz 10^{10} va fi fiind un semn gol, nici o ființă neavînd vreo reprezentare corespunzătoare acestui nume.

Iată deci la ce rezultate bizare ajungem dacă explicităm cît de cît ideea că numărul ar fi o reprezentare. Ajungem la concluzia că numărul nu este nici spațial, nici fizic, în genul grămezilor de pietricele și turte dulci ale lui Mill, după cum nu este subiectiv ca reprezentările, ci este nesenzorial și obiectiv. Temeiul obiectivității nu poate să rezide în impresia senzorială care, ca afect al cugetului nostru, este integral subiectiv, ci, atîta cît pot vedea eu, rezidă numai în rațiune.

Ar fi uimitor ca cea mai exactă dintre toate științele să se sprijine pe o psihologie care își mai dibuie încă drumul.

Numărul ca mulțime

§ 28. Anumiți autori definesc numărul ca pe o mulțime, multitudine sau pluralitate. Unul din viciile acestei concepții constă în faptul că numerele 0 și 1 sînt excluse din sfera conceptului de număr⁷⁷. Expresiile de mai sus sînt extrem de vagi: uneori, ele au o semnificație apropiată de cea a termenilor „grămadă“, „grup“, „agregat“ — care sugerează o alăturare în spațiu — alteori ele sînt utilizate în aproape aceeași accepție ca și „număr“, însă într-un mod mai imprecis. De aceea, o analiză a conceptului de număr nu este de găsit într-o definiție de acest gen. Formarea numărului pretinde — după Thomae^{*78} — ca mulțimilor diferite de obiecte să li se confere denumiri diferite. Prin aceasta se are în vedere, evident, o determinare mai precisă a acelor mulțimi de obiecte, determinare pentru care conferirea denumirilor constituie numai un semn exterior. Problema constă însă în a ști ce fel de determinare intră în joc. Este evident că ideea de număr nu ar apare dacă în loc de „3 stele“ „3 degete“,

* *Elementare Theorie der analytischen Functionen*, p. 1.

„7 stele“ am vrea să introducem denumiri în care nu s-ar putea detecta părți componente comune. Chestiunea nu este de a da în genere nume, ci de a desemna ca atare ceea ce ține aici de număr. Dar pentru aceasta se cere ca ceea ce ține de număr să fie recunoscut în specificitatea sa.

Totodată, trebuie să avem în vedere următoarea deosebire. Unii numesc număr o mulțime de lucruri sau obiecte; alții, printre care și Euclid* îl definesc ca o mulțime de unități. Această din urmă expresie reclamă o discuție separată.

III. Opinii privitoare la unitate și unu⁸⁰

Exprimă numeralul „unu“ o proprietate a obiectelor?

§ 29. În definițiile pe care Euclid le dă la începutul Cărții a VII-a a *Elementelor*, el pare să desemneze prin cuvîntul „μονάς“ cînd un obiect ce trebuie numărat, cînd o proprietate a unui asemenea obiect, cînd numărul unu. Îl putem traduce peste tot prin „unitate“, dar numai pentru că însuși acest cuvînt evocă toate aceste accepții variate⁸¹.

Schröder** spune: „Fiecare din lucrurile ce trebuie numărate se va numi unitate“. Se pune întrebarea de ce mai întii aducem lucrurile sub conceptul unității și nu introducem pur și simplu definiția: „numărul este o mulțime de lucruri“, ceea ce ne-ar readuce iarăși la concepția de mai sus. În primul rînd, s-ar putea ca, acordînd lucrurilor denumirea de unități, să vrem a le determina mai exact, întrucît îl privim pe „unu“, potrivit formei sale lingvistice, ca pe un adjectiv, înțelegînd astfel „un oraș“ în același fel ca „om înțelept“⁸². În acest caz, o unitate ar fi un obiect căruia îi revine proprietatea „unu“ și ea s-ar

* Cartea a VII-a a *Elementelor*, începutul: μονάς ἐστι, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἔν λίγεται. Ἀριθμός δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγχείμενον πλῆθος⁷⁹.

** Op. cit., p. 5.

raporta la „unu“ la fel cum se raportează „un înțelept“ la adjectivul „înțelept“. Considerațiilor care au fost aduse mai sus împotriva ideii că numărul ar fi o proprietate a lucrurilor li se mai adaugă aici câteva argumente speciale. În primul rînd, ar fi surprinzător faptul că fiecare lucru în parte ar trebui să posede această proprietate. Ar fi de neînțeles de ce atunci în genere mai atribuim în mod expres vreunui lucru această proprietate. Aserțiunea că Solon este înțelept capătă un sens numai pentru că este posibil ca ceva să nu fie înțelept. Comprehensiunea unui concept descrește atunci cînd extensiunea sa crește; atunci cînd extensiunea devine atotcuprinzătoare, comprehensiunea se subțiază pînă la dispariție⁸³. Este greu de crezut că limba ar ajunge să făurească un adjectiv ce nu ar contribui cu nimic la definirea mai precisă a unui obiect⁸⁴.

Dacă „un om“ ar putea fi interpretat în același mod ca „om înțelept“, ar trebui să admitem că „unu“ poate fi aplicat și în calitate de predicat, astfel încît să putem spune „Solon a fost unul“ la fel cum putem spune „Solon a fost înțelept“. Dar, deși pe prima dintre aceste două expresii o putem întîlni într-adevăr, luată în sine ea nu este inteligibilă. Ea poate să însemne, de exemplu: „Solon a fost unul dintre înțelepți“, atunci cînd putem completa cu „dintre înțelepți“ expresia citată, pe baza contextului în care ea apare. Dar, după toate aparențele, cînd este luat în mod izolat „unu“ nu poate fi predicat*. În cazul pluralului aceasta iese și mai clar în evidență. În timp ce „Solon a fost înțelept“ și „Tales a fost înțelept“ se pot concentra în „Solon și Tales au fost înțelepți“, nu putem spune „Solon și Tales au fost unu“. Dar această imposibilitate nu s-ar putea întrevedea pe baza concepției discu-

* În anumite expresii, „unu“ este utilizat în accepții care par să o contrazică pe cea de mai sus, dar o analiză mai amănunțită ne permite să constatăm că un termen conceptual necesită o întregire, sau că „unu“ nu este folosit ca numeral, că ceea ce se intenționează a se aserta nu este unicitatea, ci însușirea de a fi unitar.

tate, de vreme ce „unu“ ar fi, în aceeași măsură ca și „înțelept“, o proprietate atât a lui Solon cît și a lui Tales.

§ 30. În aceeași ordine de idei se poate observa că nimeni nu a fost în măsură să dea o definiție a proprietății „unu“. Atunci cînd Leibniz^{*} spune: „Este unu ceea ce noi concepem printr-un act al intelectului“, el definește „unu“ în mod circular. Și oare nu am putea concepe și multiplul printr-un singur act al intelectului? Leibniz admite aceasta în cadrul aceluiași pasaj. La fel. Baumann^{**} spune că „este unu ceea ce noi concepem ca unu“, și continuă: „Ceea ce luăm ca punct sau nu admitem a fi mai departe divizat este privit de noi în calitate de unu; însă pe orice unu al intuiției exterioare, atât al celei pure cît și al celei empirice, îl putem privi și ca pe o multiplicitate. Orice reprezentare este una, dacă o delimităm în raport cu o altă reprezentare, însă cînd este luată în sine înăuntrul ei putem distinge de asemenea o multiplicitate“. În felul acesta, orice delimitare intrinsecă a conceptului dispăre și totul este făcut să depindă de modul nostru de a vedea lucrurile⁸⁵. Întrebăm încă o dată: ce sens poate avea atribuirea proprietății „unu“ unui obiect oarecare, de vreme ce, potrivit modului nostru de a vedea lucrurile, fiecare obiect poate să fie și poate să nu fie unu? Cum este cu puțință ca o știință care își revendică faima tocmai de la claritatea și precizia ei maximă să se sprijine pe un concept atât de confuz?

§ 31. Or, deși Baumann^{***} întemeiază conceptul de unu pe intuiția interioară, el specifică totuși — în pasajul citat mai sus — indivizibilitatea și delimitarea ca note ale conceptului în cauză. Dacă aceste note ar conveni într-adevăr conceptului, ar trebui să ne așteptăm ca pînă și animalele să poată avea o anumită idee asupra unității. E oare cu puțință ca un cîine care privește spre Lună să aibă o idee, oricît de indistinctă, despre ceea ce noi semnificăm prin

* BAUMANN, *op. cit.*, vol. II, p. 2; ed. Erdmann, p. 8.

** *Op. cit.*, vol. II, p. 669.

*** *Ibidem.*

cuvîntul „unu“? E greu de admis! Și totuși, nu încapе în-doială că el distinge obiecte individuale: alt cîine, stăpî-nul său, piatra cu care se joacă, îi apar tot atît de delimi-tate, de subzistente în sine, de indivizate precum ne apar și nouă. Negreșit, el va sesiza o deosebire între a trebui să se apere împotriva mai multor cîini și a trebui să se apere împotriva unuia singur, dar în cazul de față avem ceea ce Mill numește diferența fizică. Problema care se ridică în mod deosebit aici este dacă un cîine e conștient, fie cel pu-țin într-un mod foarte confuz, de elementul comun, ex-primat de noi prin cuvîntul „unu“, al situațiilor în care, bunăoară, este mușcat de un cîine mai mare și, respectiv, fugărește el o pisică. După mine, aceasta este improbabil. De aceea, trag concluzia că ideea unității, spre deosebire de ceea ce crede Locke*, nu este sugerată intelectului de orice obiect din afara noastră și de orice idee dinăuntrul nostru⁸⁶, ci ea ajunge să fie cunoscută de noi prin mijlo-cirea facultăților intelectuale superioare care ne deosebesc pe noi de animale. Ca atare, individualitatea, delimitarea și alte proprietăți ale lucrurilor pe care animalele le percep tot atît de bine ca și noi nu pot constitui elemen-tul esențial al conceptului nostru.

§ 32. Și totuși, o anumită conexiune poate fi întrevă-zută. Ea este indicată de limbă, atunci cînd din „unu“ ea derivă „unitar“, „unit“. Un lucru este cu atît mai apt de a fi privit ca un obiect distinct, cu cît trăsăturile sale dis-tinctive ies mai mult în relief în raport cu trăsăturile distinctive ale mediului ambiant și cu cît coeziunea sa in-terioară precumpănește asupra conexiunii sale cu mediul ambiant. „Unitar“ semnifică deci o proprietate ce ne permite să detașăm lucrul pe care îl gîndim de mediul său ambiant și să-l considerăm ca ceva în sine. Așa se și explică de ce cuvîntul francez „uni“ ajunge să însemne „uniform“, „continuu“. La rîndul său, cuvîntul „unitate“ este întrebuițat într-un mod asemănător, atunci cînd vor-bim despre unitatea politică a unei țări, despre unitatea

* BAUMANN, *op. cit.*, vol. I, p. 409.

unei opere de artă*. Dar, în acest sens, „unitate“ ține mai puțin de „unu“ decât de „unit“ sau „unitar“. Într-adevăr, atunci când spunem că Pământul are *un* satelit, intenția noastră nu este să arătăm că acesta este un satelit delimitat, subzistent în mod autonom, indivizat, ci să marcăm contrastul cu ceea ce se întâmplă în cazurile lui Venus, Marte sau Iupiter. Sub raportul delimitării și indivizibilității, sateliții lui Iupiter sînt pe deplin comparabili cu cel al nostru, ei fiind, în acest sens, tot atît de unitari.

§ 33. Unii autori ridică indivizarea la rang de indivizibilitate. G. Köpp** numește individ orice lucru cunoscut prin simțuri ori într-un alt mod și care este gîndit ca indecompozabil și ca subzistent prin sine însuși, iar apoi, pe indivizii care trebuie numărați, îi numește unuuri; în mod evident, „unu“ este luat aici în sensul de unitate. Baumann își justifică părerea sa că lucrurile exterioare nu ar reprezenta unități stricte, prin considerentul că avem libertatea de a le privi ca multitudini, drept care el prezintă și indecompozabilitatea ca un criteriu al unității stricte. Ridicarea coeziunii interne la rangul de absolut urmărește, evident, dobîndirea unui criteriu al unității care să nu mai depindă de un mod sau altul de a înțelege lucrurile. Tentativa eșuează datorită faptului că în acest caz nu ne mai rămîne aproape nimic ce ar mai putea fi numit unitate și numărat. De aceea, ne vedem siliți să batem imediat în retragere, adoptînd ca criteriu nu indecompozabilitatea însăși, ci numai faptul de a fi gîndit ca indecompozabil. Însă atunci ajungem din nou la concepția ezitantă de mai sus. Dar dacă gîndim lucrurile altfel decât sînt ele în realitate, dobîndim cel puțin vreun avantaj? Nicidecum! Dintr-o ipoteză falsă pot decurge concluzii false. Dar dacă din indecompozabilitate nu vrem a infera vreo concluzie, în ce mai poate consta utilitatea

* Cu privire la istoricul cuvîntului „unitate“, a se vedea EUCKEN, *Geschichte der philosophischen Terminologie*, pp. 122—123, 136, 220.

** *Schularithmetik*, pp. 5—6, Eisenach, 1867.

ei? Dacă putem să renunțăm și chiar trebuie să renunțăm fără prejudicii la rigoarea conceptului avut în vedere, pentru ce am mai căutat această rigoare? Dar poate că nu ni se cere altceva decît să nu gîndim această decompozabilitate. Ca și cum lipsa de gîndire ne-ar face să cîștigăm ceva!⁸⁷ Există însă cazuri cînd nu mai putem evita în nici un chip să gîndim decompozabilitatea, atunci cînd raționamentul se sprijină pe însuși caracterul compus al unității. Fie, de exemplu, problema: dacă o zi are 24 de ore, cîte ore sînt în 3 zile?

Sînt oare identice unitățile?

§ 34. Așadar, orice tentativă de a defini proprietatea „unu” eșuează, încît ne vedem obligați să renunțăm la a vedea în desemnarea lucrurilor ca unități o determinare mai lămuritoare. Ne reîntoarcem iarăși la întrebarea noastră: de ce mai spunem că lucrurile sînt unități, de vreme ce „unitate” ar fi numai un alt nume pentru „lucru”, de vreme ce toate lucrurile sînt unități sau pot fi concepute ca atare?⁸⁸ E. Schröder* vede explicația în identitatea care este prescrisă obiectelor supuse numărării. — Dar, în primul rînd e de neînțeles de ce cuvintele „lucru” și „obiect” nu ar putea să indice aceasta la fel de bine. Mai departe se pune întrebarea: de ce atribuim obiectelor numărării însușirea de a fi identice? Această identitate li se atribuie numai, sau ele sînt realmente identice? În orice caz, două obiecte *nu* sînt n i c i o d a t ă absolut identice. Pe de altă parte, aproape întotdeauna putem găsi, desigur, un criteriu potrivit căruia două obiecte oarecare concordă între ele⁸⁹. Dar astfel am ajuns din nou la modul arbitrar de a concepe lucrurile, în cazul cînd, păcătuind împotriva adevărului, nu vrem să atribuim lucrurilor o identitate mai largă decît aceea care le revine în mod real. Și, într-adevăr, mai mulți autori pretind că unitățile sînt identice, fără nici o limitare. Hobbes**

* *Op. cit.*, p. 5.

** BAUMANN, *op. cit.*, vol. I, p. 242.

afirmă că „numărul în sensul absolut presupune în matematică unități identice între ele, din care este alcătuit”⁹⁰. Hume* consideră părțile componente ale cantității și numărului ca absolut similare⁹¹. Thomae** numește unitate un individ al mulțimii și adaugă: „unitățile sînt identice între ele”. Cu egal sau chiar cu mai mult temei s-ar putea spune: indivizii mulțimii sînt distincți. Ce poate însemna însă pentru număr această pretinsă identitate? Proprietățile prin care lucrurile se disting între ele sînt indiferente și irelevante în ceea ce privește numărul acestora, și tocmai de aceea vrem să le ținem de o parte. Numai că, în maniera sus-menționată, nu putem reuși. Dacă, așa cum pretinde Thomae, „se face abstracție de particularitățile indivizilor unei mulțimi de obiecte”, „ori de cîte ori se consideră lucruri separate, se trec cu vederea caracteristicile prin care lucrurile se diferențiază între ele”, atunci — în pofida părerii lui Lipschitz — ceea ce ne rămîne nu este „conceptul de număr al lucrurilor considerate”, ci un concept general căruia i se subsumează acele lucruri⁹². Lucrurile înseși nu pierd prin aceasta nici una din trăsăturile lor specifice. Dacă, de exemplu, eu fac abstracție de proprietățile prin care o pisică albă și o pisică neagră se deosebesc între ele, obțin, probabil, conceptul „pisică”. Dacă le strîng acum pe amîndouă sub acest concept și le numesc, să spunem, unități, pisica albă rămîne tot albă iar cea neagră tot neagră. Chiar dacă nu mă gîndesc la culorile lor sau nu-mi propun să trag vreo concluzie pe baza acestei deosebiri a lor, pisicile nu devin incolore, ci rămîn la fel de distincte ca înainte. Ce-i drept, conceptul „pisică” la care s-a ajuns prin abstracție nu mai conține particularitățile, însă tocmai de aceea el este numai unul⁹³.

§ 35. Lucruri diferite nu pot fi făcute identice prin intermediul unor metode pur conceptuale; dar dacă aceasta ar fi posibil, atunci nu am mai avea o pluralitate de lu-

* BAUMANN, *op. cit.*, vol. II, p. 568.

** *Op. cit.*, p. 1.

cruri, ci un lucru și numai unul. Într-adevăr, așa cum spune Descartes*, numărul — sau mai curînd pluralitatea — lucrurilor provine din diversitatea lor⁹⁴. E. Schröder** afirmă pe drept cuvînt: „Cererea de a număra lucrurile poate fi emisă în mod rațional numai acolo unde obiectele în cauză apar în mod clar ca distincte, de exemplu ca separate în spațiu și timp și delimitate totodată între ele“. Într-adevăr, de multe ori asemănarea prea mare a obiectelor, de exemplu a șipcilor unui gard, îngreunează numărarea. Deosebit de pregnantă în acest sens sînt afirmațiile lui W. Stanley Jevons***: „Numărul nu este decît un alt nume pentru *diversitate*. Identitatea exactă este unitate, iar odată cu diferența apare pluralitatea“. Și mai departe (la p. 157): „S-a afirmat adesea că unitățile sînt unități prin faptul că sînt perfect similare între ele; dar, deși în anumite privințe pot fi perfect asemănătoare, ele trebuie să se deosebească cel puțin într-un punct, altfel ar fi incapabile de pluralitate. Dacă trei monede ar fi într-atîta de asemănătoare încît să ocupe același loc în același timp, ele nu ar mai fi trei monede, ci una“.

§ 36. Dar, așa cum se constată imediat, concepția după care unitățile sînt diferite se ciocnește de dificultăți noi. Jevons explică: „O unitate este un obiect oarecare al gîndirii care poate fi distins de orice alt obiect tratat ca unitate în cursul aceleiași probleme. Aici unitatea este definită prin intermediul ei însăși iar precizarea „care poate fi distins de orice alt obiect“ nu cuprinde o specificare mai adecvată, deoarece este subînțeleasă. Despre un obiect spunem că este un altul, tocmai și numai pentru că îl putem deosebi de alte obiecte. În continuare, Jevons**** spune: „Ori de cîte ori utilizez simbolul 5, eu înțeleg de fapt

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

* BAUMANN, *op. cit.*, vol. I, p. 103.

** *Op. cit.*, p. 3.

*** *The Principles of Science*, 3d. ed. p. 156.

**** *Op. cit.*, p. 162.

și este perfect clar că fiecare dintre aceste unități este distinctă de oricare alta. Dacă ar fi de dorit, le-aș putea nota astfel:

$$1' + 1'' + 1''' + 1'''' + 1''''',$$

În mod cert, notarea lor diferită este de dorit, odată ce sînt diferite; altfel s-ar crea o mare confuzie. Dacă însăși poziția deosebită în care apare 1 ar trebui să semnifice o deosebire, ar trebui stipulată în acest sens o regulă ce nu admite excepții, întrucît în caz contrar nu am ști nici odată dacă $1+1$ trebuie să însemne 2 sau 1. Dar atunci ar trebui să respingem egalitatea $1=1$ și ne-am găsi puși în situația dificilă de a nu putea nota vreodată același lucru pentru a doua oară. Evident, această situație e inacceptabilă. Dacă însă vrem să atribuim semne distincte unor lucruri distincte este greu de văzut pentru ce mai păstrăm o parte componentă comună a acestor semne și de ce, în loc de a scrie

$$1' + 1'' + 1''' + 1'''' + 1''''',$$

nu scriem mai curînd

$$a + b + c + d + e.$$

Într-adevăr, identitatea am pierdut-o oricum, iar indicarea unei anumite asemănări nu servește la nimic. În felul acesta, unu ne scapă din miini; ne rămîn obiectele cu toate particularitățile lor. Simbolurile

$$1', 1'', 1'''$$

sînt o expresie grăitoare a perplexității noastre: ne trebuie identitatea, drept care avem notația 1; ne trebuie diferența — drept care avem notația cu indici dar care, din păcate, anulează identitatea.

§ 37. Aceeași dificultate o întîlnim și la alți autori. Locke* spune: „Repetînd ... ideea unității și unind-o cu altă unitate, ne formăm despre ea o idee colectivă de-

* BAUMANN, *op. cit.*, vol. I, pp. 409—411.

semnată prin cuvîntul «doi». Și acel ce poate să facă acest lucru și să înainteze, adăugînd mereu cîte o unitate la ultima idee colectivă pe care a avut-o despre un anumit număr și dîndu-i o denumire, acela poate să calculeze...^{94a}. Leibniz* definește numărul ca 1 și cu 1 și cu 1, sau ca unități. Hesse** scrie: „Dacă cineva își poate forma vreo idee despre unitatea care în algebră se exprimă prin simbolul 1..., el poate să conceapă și o a doua unitate la fel de justificată ca prima, iar apoi și alte unități de același gen. Reunirea celei de-a doua cu prima într-un singur tot dă numărul 2“.

În aceste afirmații trebuie reținută relația în care se află semnificațiile cuvintelor „unitate” și „unu”. Prin unitate, Leibniz înțelege un concept sub care cad acest unu și acest unu și acest unu, sau, așa cum mai spunea el: „Abstrasul din unu este unitatea”. Locke și Hesse par să folosească unitate și unu în una și aceeași accepție. În ultimă instanță Leibniz procedează la fel; într-adevăr, întrucît el numește *unum* pe fiecare dintre obiectele individuale care cad sub conceptul unității, acest cuvînt desemnează la el nu obiectul individual, ci conceptul sub care cad toate obiectele individuale.

§ 38. Pentru a evita orice confuzie, va fi indicat totuși să distingem în mod strict între unitate și unu. Noi folosim expresia „numărul unu” și indicăm prin intermediul articolului hotărît un obiect individual determinat al investigației științifice⁹⁵. Nu există numere unu diferite, există unul singur. În 1 avem un nume propriu care în această calitate este tot atît de puțin susceptibil să primească pluralul ca „Friedrich cel Mare” sau „elementul chimic aur”. Faptul că scriem 1 fără liniuțe care să marcheze diferențele nu este o simplă întîmplare, iar notația nu este inexactă. St. Jevons ar scrie egalitatea

$$3 - 2 = 1$$

* *Ibidem*, vol. II, p. 3.

** *Vier Species*, p. 2.

sub o formă ca:

$$(1' + 1'' + 1''') - (1'' + 1''') = 1'.$$

Ce rezultat ar avea însă

$$(1' + 1'' + 1''') - (1'''' + 1''''')?$$

În nici un caz, nu $1'$. De aici urmează că, potrivit concepției sale, ar exista nu numai unu diferiți, ci și doi diferiți etc.; într-adevăr, $1'' + 1'''$ nu ar putea fi reprezentați prin $1'''' + 1'''''$. De aici rezultă cât se poate de clar că numărul nu este un conglomerat de lucruri. Aritmetica ar înceta să existe dacă în locul numărului unu, care este întotdeauna același, am vrea să introducem lucruri distincte, oricât de asemănătoare ar fi simbolurile acestora; ele nu ar putea fi făcute identice fără a se comite o eroare. Or, nu putem admite că tot ce aritmetica are mai profund este o notație eronată. Ca atare, este imposibil să-l privim pe 1 ca pe semnul unor obiecte diferite, ca semn pentru Islanda, Aldebaran, Solon și altele. Absurditatea capătă o pregnanță maximă dacă vom considera cazul unei ecuații care admite trei rădăcini și anume 2, 5 și 4. Dacă, urmîndu-l pe Jevons, vom scrie pentru 3

$$1' + 1'' + 1''',$$

și dacă prin $1'$, $1''$, $1'''$ înțelegem unități și deci înțelegem prin ele, conform lui Jevons, obiectele considerate aici, atunci $1'$ va semnifica aici 2, $1''$ va semnifica 5 iar $1'''$ va semnifica 4. Dar atunci nu ar fi mai inteligibil ca în locul lui $1' + 1'' + 1'''$ să scriem

$$2 + 5 + 4?$$

Numai numele conceptuale pot avea plural⁹⁶. Așadar, atunci cînd vorbim despre „unități“, acest cuvînt nu poate fi luat în accepția numelui propriu „unu“, ci numai în calitate de nume comun. Dacă „unitate“ înseamnă „obiect de numărat“, nu putem defini numărul ca unități. Dacă prin „unitate“ se înțelege un concept care cuprinde în sine numărul unu și numai pe acesta, plura-

lul nu are nici un sens și încă o dată devine imposibil să definim numărul, împreună cu Leibniz, ca unități sau ca 1 și 1 și 1. Într-adevăr, dacă folosim „și“ ca în „Bunsen și Kirchhof“, atunci 1 și 1 și 1 nu este 3, ci 1, la fel cum aur și aur și aur nu poate fi vreodată altceva decât aur. Semnul plus din

$$1 + 1 + 1 = 3$$

trebuie deci să fie interpretat altfel decât acel „și“, care contribuie la desemnarea unei colecții, a unei „idei colective“⁹⁷.

§ 39. Ne găsim astfel în fața următoarei dificultăți:

Dacă vrem să generăm numărul prin cuprinderea laolaltă a unor obiecte distincte, ceea ce obținem este o multitudine în care obiectele sînt conținute cu tocmai acele proprietăți ale lor prin care se deosebesc între ele, iar aceasta nu este numărul. Dacă, pe de altă parte, încercăm să formăm numărul prin cuprinderea laolaltă a identicilor, rezultatul trece întotdeauna în unu și nu ajungem niciodată la o pluralitate.

Dacă prin 1 desemnăm fiecare din obiectele de numărat, comitem o eroare, întrucît unor lucruri distincte li se atribuie unul și același semn. Iar dacă îl înzestrăm pe 1 cu liniuțe distinctive, atunci el nu mai este aplicabil în aritmetică.

Cuvîntul „unitate“ are darul de a camufla dificultatea; tocmai acesta este motivul — ce-i drept, inconștient — pentru care el este preferat în comparație cu cuvintele „obiect“ și „lucru“⁹⁸. Noi începem prin a spune că lucrurile de numărat sînt unități, acordînd astfel diversității ceea ce i se cuvine; după aceea, cuprinderea laolaltă, colectarea, adunarea, reunirea, adăugarea, sau cum mai vrem să-i spunem, trece în conceptul adunării aritmetice, iar termenul general „unitate“ se transformă pe nesimțite în numele propriu „unu“. În felul acesta se ajunge la identitate. Dacă la litera „ș“ adaug litera „i“, oricine va constata cu ușurință că ceea ce obținem nu este numărul 2. Dacă însă subsumez ș și i conceptului „unitate“

și în loc de „ș și i“ spun: „o unitate și încă o unitate“ sau „1 și cu 1“, sîntem gata să credem că am obținut astfel numărul 2. Această dificultate este atît de bine camuflată de cuvîntul „unitate“, încît, negreșit, puțini ajung măcar să o bănuiască.

Aici Mill ar fi putut denunța în mod justificat o manipulare artificioasă a limbajului; într-adevăr, avem aici nu manifestarea exterioară a unui proces de gîndire, ci numai răsfrîngerea iluzorie a acestuia. Aici căpătăm efectiv impresia că unor cuvinte goale de orice gînd li se atribuie o anumită forță misterioasă, întrucît distinctul, prin simplul fapt că i se spune unitate, este obligat să ajungă identic⁹⁹.

Încercări de a înlătura dificultatea

§ 40. Să examinăm acum unele idei care reprezintă încercări de depășire a acestei dificultăți, chiar dacă nu întotdeauna ele au fost întreprinse cu o conștiință pe deplin clară în această intenție.

În primul rînd, se poate face apel la o anumită proprietate a spațiului și timpului. Un punct al spațiului nu poate fi distins de un altul, atîta timp cît îl considerăm numai în sine, și același este cazul liniilor drepte, planelor, sau cazul corpurilor, ariilor și segmentelor congruente; toate aceste entități de un același gen pot fi distinse între ele numai ca existente în cadrul unui ansamblu, numai ca părți componente ale unei intuiții totale. Se pare deci că aici identitatea se combină cu discernabilitatea. În cazul timpului, situația este similară. Poate că tocmai de aceea Hobbes* consideră că identitatea unităților nu poate fi concepută altfel decît ca generată prin divizarea continuului¹⁰⁰. La rîndul său, Thomae** spune: „Dacă ne prezentăm o mulțime de indivizi sau de unități în spațiu și le numărăm în mod succesiv, ceea ce reclamă timp,

* BAUMANN, *op. cit.*, vol. I, p. 242.

** *Elementare Theorie der analyt. Functionen*, p. 1.

încă mai rămîne ca o notă distinctivă a unităților — oricît am abstrage — poziția lor diferită în spațiu și succesiunea lor diferită în timp“.

Împotriva unei asemenea concepții se ridică în primul rînd obiecția că, dacă ar fi așa, atunci numai ceea ce este spațial și temporal ar fi numărabil. Încă Leibniz* a respins ideea scolasticilor după care numărul ar apărea prin simpla divizare a continuului și nu ar putea fi aplicat la lucruri corporale¹⁰¹. Baumann** relevă independența numărului față de timp. Conceptul de unitate poate fi gîndit, după acest autor, independent de timp. St. Jevons*** scrie: „Trei monede sînt trei monede, indiferent dacă le numărăm în mod succesiv sau le privim pe toate în mod simultan. În multe cazuri, nici spațiul, nici timpul nu sînt temeiul diferenței, numai calitatea pură intrînd în joc. Putem distinge, de exemplu, greutatea, inerția și duritatea aurului ca trei însușiri, deși nici una dintre acestea nu este înaintea alteia sau după alta, nu este în spațiu sau în timp. Orice mijloc de discriminare poate fi o sursă a pluralității“. — Aș adăuga că dacă obiectele numărate nu se succed în realitate, ci sînt numai numărate în mod consecutiv, timpul nu poate fi temeiul discriminării. Într-adevăr, pentru ca să poată fi numărate în mod consecutiv, trebuie să dispunem deja de anumite note distinctivă. Timpul nu este decît o exigență psihologică a numărării, dar el nu are de-a face cu conceptul de număr¹⁰². Reprezentînd obiecte nespațiale și atemporale prin puncte spațiale sau temporale, putem facilita eventual demersul numărării; dar în principiu este presupusă astfel aplicabilitatea conceptului de număr la ceva ce nu este de ordin spațial sau temporal¹⁰³.

§ 41. Mai departe însă, în ipoteza că trecem cu vederea toate notele distinctivă, cu excepția celor de ordin spațial și temporal, reușim oare într-adevăr să unim discerna-

* BAUMANN, *op. cit.*, vol. II, p. 2.

** *Op. cit.*, vol. II, p. 668.

*** *The Principles of Science*, p. 157.

bilitatea și identitatea? Cîtuși de puțin! Nu ne-am apropiat nici măcar cu un pas de soluție. Asemănarea mai mică sau mai mare a obiectelor nu contribuie cu nimic la rezolvarea problemei, de vreme ce pînă la urmă aceste obiecte trebuie să fie păstrate separate. Eu nu pot nota aici toate punctele individuale, liniile individuale etc. prin 1, tot așa cum în considerațiile de ordin geometric eu nu le pot nota pe toate împreună prin A; și într-un caz, și în celălalt se cere să le distingem între ele. Numai luate în sine, fără a ține seama de relațiile lor spațiale, punctele spațiului sînt identice între ele. Dacă însă trebuie să le gîndesc împreună, sînt obligat să le consider în cadrul existenței lor spațiale comune, pentru ca să nu se contopească iremediabil în unul. Luate împreună, unele puncte pot forma eventual o figură oarecare, de exemplu în formă de stea, sau pot să se ordoneze într-un fel sau altul pe o dreaptă, iar segmente egale puse cap la cap pot forma un segment unic, sau pot fi complet separate. Configurațiile apărute în acest mod pot fi complet diferite, în timp ce numărul elementelor rămîne același. Dar atunci am avea și aici diferite numere cinci, diferite numere șase ș.a.m.d. La fel, punctele timpului sînt separate prin intervale temporale scurte sau lungi, egale sau inegale. Toate acestea sînt relații care nu au absolut nimic de-a face cu numărul ca atare. În toate intervine un element special, deasupra căruia numărul în universalitatea lui se ridică cu mult. Pînă și un moment individual are ceva cu totul specific prin care se diferențiază, să spunem, de un punct al spațiului și din care nu mai rămîne nimic în cadrul conceptului de număr¹⁰⁴.

§ 42. Nici soluția de a înlocui ordinea spațială și temporală printr-un concept mai general de șir nu-și atinge țelul propus; într-adevăr, pozițiile obiectelor în cadrul unui șir nu pot constitui temeiul distingerii lor, întrucît ele trebuie să fi fost în prealabil distinse într-un fel sau altul, ca să se poată ordona în șir. O atare aranjare presupune întotdeauna relații între obiecte, să spunem relații spațiale, temporale, logice sau intervale de su-

nete, sau oricare altele; asemenea relații ne conduc de la un obiect la altul, ele fiind legate în mod necesar de distingerea obiectelor.

Atunci cînd Hankel* spune că un obiect poate fi gîndit sau instituit o dată, de două ori sau de trei ori, avem aici, după cum se pare, o nouă încercare de a combina discernabilitatea cu identitatea lucrurilor ce urmează a fi numărate. Dar se poate constata imediat că nici această încercare nu este mai reușită; într-adevăr, reprezentările sau intuițiile unuia și aceluiași obiect trebuie să se diferențieze între ele, într-un fel sau altul, pentru a nu se topi într-un unu. Totodată, cred că avem dreptul să vorbim despre 45 milioane de germani fără a fi gîndit sau pus în prealabil de 45 milioane de ori un german obișnuit, ceea ce ar fi oarecum incomod¹⁰⁵.

§ 43. Probabil pentru a evita dificultățile întîmpinate atunci cînd, odată cu St. Jevons, facem să se desemneze prin semnul 1 unul dintre obiectele numărate, E. Schröder vede în acest semn numai imaginea unui obiect. Rezultatul este că el explică numai semnul numărului, nu însuși numărul. Într-adevăr, el spune^{**}: „Pentru a căpăta un semn capabil să exprime cîte dintre aceste unități^{***} sînt date, ne îndreptăm atenția rînd pe rînd la cîte unul *de fiecare dată* și îl reprezentăm printr-o lini-oară verticală: 1 (un unu); acești unu îi înșirăm unul lîngă altul, legîndu-i însă prin semnul + (plus), căci în caz contrar III, de exemplu, s-ar citi în notația uzuală a numerelor ca o sută unsprezece. Căpătăm astfel un semn ca:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1,$$

a cărui structură poate fi descrisă spunînd:

„Un număr natural este o sumă de mai mulți unu“. Reiese că pentru Schröder numărul este un semn.

* *Theorie der complexen Zahlensysteme*, p. 1.

** *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra*, p. 5 și urm.

*** Obiecte ce urmează a fi numărate.

Ceea ce exprimă acest semn, adică ceea ce pînă acum eu am numit număr, Schröder presupune că este deja cunoscut, dovadă cuvintele „cîte dintre acele unități sînt date“. Prin cuvîntul „unu“, el înțelege, de asemenea, semnul 1, nu semnificația acestuia¹⁰⁶. El folosește mai întîi semnul + numai ca pe un mijloc exterior de legare, lipsit de orice conținut propriu; abia ulterior definește el adunarea. El ar fi putut spune mai succint: scriem unul lîngă altul tot atîtea semne 1 cîte obiecte de numărăm avem și le legăm prin semnul +. Zero s-ar exprima prin faptul că nu scriem nimic.

§ 44. Pentru a nu introduce înăuntrul numărului notele distinctive ale lucrurilor, St. Jevons¹⁰⁷ face următoarea precizare: „Acum va fi ușor să ne formăm o idee clară asupra naturii abstracției numerice. Ea constă în a abstrage caracterul diferenței din care survine pluralitatea, reținînd pur și simplu faptul existenței sale. Atunci cînd vorbesc despre trei oameni nu sînt obligat să specific imediat notele prin care fiecare dintre aceștia poate fi distins de ceilalți doi. Aceste note trebuie să existe, dacă ei sînt într-adevăr trei oameni și nu unul și același, iar atunci cînd mă refer la ei ca la mai mulți eu presupun existența diferențelor cerute. Numărul abstract este deci forma vidă a diferenței“.

Cum să înțelegem aceasta? Putem sau să facem abstracție de proprietățile distinctive ale lucrurilor, înainte de a le reuni într-un întreg, sau să formăm mai întîi un întreg și să facem apoi abstracție de natura diferențelor. Aplicînd primul procedeu nu am mai ajunge deloc să distingem lucrurile și ca atare nu am mai putea reține nici faptul existenței diferențelor; Jevons pare să aibă în vedere al doilea procedeu. Eu nu cred însă că noi am putea ajunge în acest mod la numărul 10 000, întrucît nu sîntem în stare să cuprindem simultan atîtea diferențe și să reținem totodată faptul existenței lor; pe de

¹⁰⁷ *Op. cit.*, p. 158.

altă parte, dacă le-am gândi rînd pe rînd, numărul nu ar mai ajunge să fie încheiat¹⁰⁷. E adevărat că numărarea decurge în timp; dar în felul acesta noi nu obținem numărul, ci doar îl determinăm. Și, dealtfel, specificarea modalității de abstragere nu constituie o definiție¹⁰⁸.

Ce trebuie să se înțeleagă prin „forma vidă a diferenței”? Nu cumva o propoziție ca

„a este diferit de b“,

unde a și b rămîn nedeterminate? Ar putea fi această propoziție numărul 2, să spunem? Oare propoziția

„Pămîntul are doi poli“

înseamnă același lucru ca

„Polul Nord este diferit de Polul Sud“?

Evident că nu. A doua propoziție ar putea avea loc fără ca prima să aibă loc, și viceversa¹⁰⁹. În cazul numărului 1000 vom avea deci

$$\frac{1000 \cdot 999}{1 \cdot 2}$$

de asemenea propoziții ce exprimă o diferență.

Afirmația lui Jevons își vedește în mod deosebit inadecvarea în cazul lui 0 și 1. De la ce vom face anume abstracție spre a ajunge, bunăoară, de la Lună la numărul 1? Prin abstragere căpătăm, de bună seamă, conceptele: satelit al Pămîntului, satelit al unei planete, corp ceresc fără lumină proprie, corp ceresc, corp, obiect. Dar 1 nu poate fi găsit în acest șir, întrucît nu este un concept sub care ar putea să cadă Luna. În cazul lui 0 nici nu avem vreun obiect de la care procesul abstracției ar putea porni. Obiecția după care 0 și 1 nu sînt numere în același sens în care sînt 2 și 3 nu-și găsește loc. Numărul răspunde la întrebarea *cîți* și dacă, de exemplu, întrebăm: Cîți sateliți are această planetă? putem aștepta în egală măsură răspunsul 0 sau 1, ori răspunsul 2 sau 3, sensul întrebării rămînînd același. Fără îndoială, numărul 0 comportă ceva

specific, și tot astfel numărul 1, dar aceasta este valabil în principiu pentru orice număr întreg; singura deosebire este că în cazul numerelor tot mai mari specificul lor devine tot mai puțin evident. Ar fi cu totul arbitrar să facem din aceasta o deosebire esențială. Ceea ce nu convine lui 0 sau 1 nu poate fi esențial pentru conceptul de număr.

În sfârșit, acceptînd acest mod de apariție a numerelor nu înlăturăm nicidecum dificultatea de care ne-am ciocnit atunci cînd am considerat simbolizarea lui 5 prin

$$1' + 1'' + 1''' + 1'''' + 1'''''.$$

Acest simbolism concordă cu ceea ce spune Jevons despre abstracția prin care formăm numerele; accentele indică tocmai faptul că există o diferență, fără a preciza însă natura ei. Dar simpla subzistență a diferenței este suficientă deja — după cum am văzut — pentru a genera, după cum crede Jevons, diferiți unu, diferiți doi, diferiți trei, ceea ce este incompatibil cu existența aritmeticii.

Soluția dificultății

§ 45. Să aruncăm acum o privire asupra celor stabilite de noi pînă la acest punct și asupra problemelor ce nu și-au găsit încă răspuns.

Numărul nu este abstras din lucruri în modul în care sînt abstrase culoarea, greutatea și soliditatea, după cum nu este nici o proprietate a lucrurilor în sensul în care acestea sînt proprietăți. Dar atunci a mai rămas să se arate despre ce anume se enunță ceva prin intermediul aserțiunii numerice¹¹⁰.

Numărul nu este ceva fizic, dar nu este nici ceva subiectiv, nu este o reprezentare.

Numărul nu rezultă din adăugarea unui lucru la un lucru. Nici conferirea unei denumiri după fiecare adăugare nu schimbă nimic în această privință.

Expresiile „multitudine“, „mulțime“, „pluralitate“, dat fiind caracterul lor vag, nu sînt adecvate spre a servi la definirea numărului¹¹¹.

Referitor la unu și unitate se mai pune problema modului în care putem atenua caracterul arbitrar al concepției ce părea să estompeze orice distincție între unu și multiplu.

Delimitarea, indivizibilitatea, indecompozabilitatea nu sînt caracteristici relevante pentru ceea ce noi exprimăm prin cuvîntul „unu“.

Atunci cînd numim unități lucrurile numărate, afirmația necondiționată că unitățile ar fi identice este falsă. Desigur, este corect dar nesemnificativ faptul că într-o anumită privință unitățile sînt identice. Caracterul distinct al lucrurilor pe care le numărăm este chiar necesar, atunci cînd numărul în cauză va fi mai mare ca 1.

Așadar, se părea că eram puși în situația de a atribui unităților două proprietăți contradictorii: identitatea și discernabilitatea¹¹².

Între unu și unitate trebuie să facem o distincție. Cuvîntul „unu“, ca nume propriu al unui obiect de cercetare matematică nu admite plural. Ca atare, este absurd să facem ca numerele să rezulte din alăturarea unu-urilor. În $1+1=2$, simbolul plus nu poate semnifica o atare alăturare.

§ 46. Pentru a clarifica lucrurile, va fi indicat să privim numărul în contextul unei judecăți, acolo unde iese în evidență modalitatea sa originară de aplicare¹¹³. Dacă privitor la unul și același fenomen extern pot afirma la fel de adevărat „acesta este un grup de pomi“ și „aceștia sînt cinci pomi“, sau „iată patru companii“ și „iată 500 de oameni“, atunci ceea ce se schimbă de la caz la caz nu este nici lucrul individual, nici întregul, agregatul, ci denumirea folosită. Dar acesta nu este decît semnul înlocuirii unui concept prin altul¹¹⁴. Astfel, pentru noi devine evident, ca răspuns la prima întrebare din secțiunea precedentă, că aserțiunea numerică cuprinde un enunț pri-

viitor la un concept¹¹⁵. Aceasta este poate cel mai evident în cazul numărului 0. Dacă spunem: „Venus are 0 sateliți“ nu avem în fapt un satelit sau agregat de sateliți despre care ar putea fi ceva enunțat; în schimb, conceptului „satelit al lui Venus“ i se atribuie astfel o proprietate, și anume aceea de a nu cuprinde nimic. Dacă se spune: „Trăsura împăratului este trasă de patru cai“, atunci se atribuie numărul patru conceptului „cal înhamat la trăsura împăratului“.

Se poate obiecta că un concept cum, de exemplu, este acela de „locuitor al statului german“, deși își păstrează neschimbate notele sale, posedă o proprietate ce variază de la an la an, în cazul când aserțiunea numerică ar enunța despre el o asemenea proprietate. Răspunzând acestei obiecții, putem arăta că și proprietățile obiectelor variază, dar aceasta nu ne împiedică să le recunoaștem ca fiind aceleași. În cazul de față însă, motivul poate fi determinat încă și mai precis. Conceptul „locuitor al Germaniei“ conține, într-adevăr, timpul ca parte componentă variabilă sau, ca să mă exprim matematic, este funcție de timp. Pentru „a este un locuitor al Germaniei“ putem spune: „a locuiește în Germania“, afirmație ce se referă tocmai la momentul prezent. Așadar, însuși conceptul conține din capul locului un element fluid. În schimb, însă, conceptului „locuitor al Germaniei în prima secundă a anului 1883, ora Berlinului“ îi revine în vecii vecilor unul și același număr¹¹⁶.

§ 47. Faptul că aserțiunea numerică exprimă ceva real, independent de modul nostru de a privi lucrurile, poate fi prilej de uimire numai pentru cel ce consideră conceptul ca ceva subiectiv, asemenea reprezentării. Dar această concepție este falsă. Atunci când, de exemplu, subordonăm conceptul de corp față de conceptul de greu, sau când subordonăm conceptul balenă față de acela de mamifer¹¹⁷, afirmăm prin aceasta ceva obiectiv¹¹⁸. Or, dacă conceptele ar fi subiective, atunci și subordonarea unuia față de un altul ca relație între concepte ar constitui

ceva subiectiv, așa cum este o relație între reprezentări. La prima vedere, fără îndoială, propoziția

„toate balenele sînt mamifere“

pare să trateze despre animale, nu despre concepte¹¹⁹; dacă ne întrebăm însă despre care animale este vorba, nu sîntem în măsură să indicăm un anumit animal individual. Admițînd că ne aflăm în fața unei balene, propoziția noastră nu afirmă totuși nimic despre aceasta. Pe baza propoziției noastre nu s-ar putea conchide că animalul în fața căruia ne aflăm ar fi o balenă, lucru despre care propoziția noastră inițială nu cuprinde nimic. În general, nu este posibil să vorbim despre un obiect fără a-l desemna sau a-l denumi într-un fel sau altul¹²⁰. Cu-vîntul „balenă“ nu denumeste însă o anume ființă individuală. Se va obiecta că, într-adevăr, nu este vorba despre un anume obiect individual determinat, ci despre unul nedeterminat; după părerea mea, „obiect nedeterminat“ nu este decît o altă expresie pentru „concept“, și anume o expresie inadecvată, contradictorie¹²¹. Chiar dacă propoziția noastră poate fi justificată numai prin observarea unor animale individuale, aceasta nu demonstrează nimic în ceea ce privește conținutul ei. Dacă ne interesează la ce anume se referă propoziția în cauză, faptul că ea este adevărată sau nu n-are importanță, după cum n-are importanță nici pe ce temeuri o considerăm adevărată. Așadar, dacă conceptul este ceva obiectiv, atunci și un enunț cu privire la acesta poate cuprinde un element factual.

§ 48. În cazul unor exemple anterioare unde se crea aparența că unuia și aceluiași lucru îi revin numere diferite, explicația rezidă în faptul că obiectele erau considerate ca suport al numărului. De îndată ce repunem în drepturi adevăratul suport — conceptul — numerele se dovedesc a fi la fel de exclusive unul față de altul ca și, în domeniul respectiv, culorile.

Acum înțelegem și felul în care apare intenția de a obține numărul făcînd abstracție de lucruri. Ceea ce do-

bîndim în acest fel este conceptul, la care apoi descoperim numărul. Așadar, în realitate, abstracția premerge adesea formarea unei judecăți numerice. Confuzia este aceeași ca în cazul cînd am spune: conceptul pericolului de incendiu se obține construind un imobil din paiantă cu fronton de scînduri, acoperiș de paie și hornuri neetanșe.

Puterea de strîngere pe care o are conceptul depășește cu mult capacitatea unificatoare a apercepției sintetice. Aceasta din urmă nu ne-ar permite să unim într-un întreg locuitorii Germaniei; dar ei pot fi subsumați conceptului „locuitor al Germaniei” și numărați¹²².

Acum devine explicabilă și aplicabilitatea pe scară largă a numărului. Este într-adevăr o enigmă cum un același lucru se poate enunța la fel despre fenomene exterioare, despre fenomene interioare, despre ceea ce este spațial și despre ceea ce este temporal ca și despre ceea ce este aspațial și atemporal. Dar aserțiunea numerică nu îndeplinește nici ea acest oficiu. Numerele sint atribuite numai conceptelor, sub acestea aducîndu-se ceea ce este de ordin exterior și ceea ce este de ordin interior, spațialul și temporalul, aspațialul și atemporalul.

§ 49. Concepția noastră își găsește o confirmare la Spinoza¹²³, care spune*: „Răspund că un lucru este numit unul sau unic numai în privința existenței sale, nu însă și în privința esenței sale; căci noi ne reprezentăm lucrurile sub specia numerelor numai după ce ele au fost aduse la o măsură comună. Dacă, de pildă, cineva ține în mînă un sesterț și un imperial, el nu va gîndi numărul doi dacă nu va fi în măsură să aplice acestui sesterț și acestui imperial unul și același nume, și anume de argint sau monedă: atunci poate el să afirme că are doi arginți sau două monede; căci el desemnează nu numai sesterțul, ci și imperialul prin numele de monedă”. Cînd Spinoza continuă: „De aici este clar că un lucru este spus a fi unul sau unic numai după ce un alt lucru a fost reprezentat, lucru care (ca să spunem așa) concordă cu

* BAUMANN, *op. cit.*, vol. I, p. 169.

dînsul¹²⁴, și consideră că, în sens propriu, Dumnezeu nu poate fi numit unul sau unic, deoarece nu sîntem în măsură să formăm un concept abstract despre esența acestuia, Spinoza se înșală crezînd că conceptul poate fi obținut numai făcînd nemijlocit abstracție de mai multe obiecte. Dimpotrivă, la concept se poate ajunge și pornind de la note¹²⁵; iar în acest caz este cu puțință ca nici un lucru să nu i se subsumeze¹²⁶. Dacă nu ar fi așa, nu am putea nega vreodată existența, și astfel afirmarea existenței ar fi la rîndul ei lipsită de conținut¹²⁷.

§ 50. E. Schröder* subliniază că, pentru a se putea vorbi despre frecvența unui lucru, numele acelui lucru trebuie să fie întotdeauna un nume generic, un substantiv comun (*notio communis*): „De îndată, așadar, ce se are în vedere un obiect în mod complet — cu toate proprietățile și relațiile sale — acesta devine unic în lume în genul său și nu-și mai are seamăn. Numele obiectului va avea atunci caracterul unui nume propriu (*nomen proprium*) și obiectul nu va putea fi gîndit ca un obiect ce apare în mod repetat. Dar aceasta este valabil în genere despre orice lucru, chiar dacă reprezentarea acestuia se constituie pe baza unor abstracțiuni, cu singura condiție ca această reprezentare să înglobeze în sine suficiente elemente pentru a determina integral lucrul respectiv...“. A fi numărat „devine cu puțință în cazul unui lucru numai în măsura în care trecem cu vederea sau facem abstracție de unele însușiri și relații ce îi sînt proprii și prin intermediul cărora el se diferențiază de toate celelalte lucruri; abia atunci numele lucrului devine un concept aplicabil la mai multe lucruri“.

§ 51. Ceea ce conține adevărat această explicație este îmbrăcat în expresii atît de întortochiate și derutante, încît se impun o analiză și o triere. În primul rînd, este inadecvat să spunem că un nume comun este nume al

* Op. cit., p. 6.

unui lucru. În felul acesta se creează aparența că numărul ar fi proprietate a unui lucru. Un nume comun desemnează tocmai un concept¹²⁸. Numai împreună cu articolul hotărît sau cu un pronume demonstrativ el funcționează în calitate de nume propriu al unui lucru, dar, prin aceasta, el încetează să funcționeze ca nume comun. Numele unui lucru este un nume propriu¹²⁹. Mai departe, nu un obiect apare în mod repetat, ci mai multe obiecte cad sub un concept. Am observat deja, obiectînd lui Spinoza, că un concept se poate obține și altfel decît prin abstracție, adică pornind de la lucrurile care i se subsumează. Aici mai adaug că un concept nu încetează să fie concept atunci cînd lui i se subsumează un singur lucru care, astfel, este determinat în mod integral pe baza acestui concept¹³⁰. Unui asemenea concept (de exemplu, cel de satelit al Pămîntului) îi revine tocmai numărul 1, care este număr în același sens în care sînt 2 și 3. În cazul unui concept se pune întotdeauna întrebarea dacă lui i se subsumează ceva, și anume ce. În cazul unui nume propriu, asemenea întrebări sînt lipsite de sens¹³¹. Nu trebuie să ne lăsăm înșelați de faptul că în cadrul limbii un nume propriu, de exemplu, Lună, este folosit în calitate de substantiv comun, și viceversa¹³²; în pofida acestui fapt, distincția subzistă. De îndată ce cuvîntul este întrebuințat împreună cu articolul nehotărît sau la plural fără articol, el este un termen conceptual, un nume comun.

§ 52. O altă confirmare a concepției după care numărul este aplicat conceptelor o putem găsi în uzul limbii germane, în care spunem „zehn Mann“, „vier Mark“, „drei Fass“, utilizînd singularul¹³³. În cazul de față, singularul ar putea să indice că este vizat nu lucrul, ci conceptul. Avantajul acestui mod de exprimare iese în evidență în mod deosebit în cazul numărului 0. Altminteri, ce-i drept, limbajul atribuie numărul nu conceptului, ci obiectelor: vorbim despre „numărul mingilor“, așa cum vorbim despre „greutatea mingilor“. În acest fel, vorbim în aparență despre obiecte, pe cînd, în realitate, vrem să enunțăm ceva despre un concept. Această uzanță

lingvistică este derutantă. Expresia „patru cai de rasă“ creează aparența că „patru“ califică conceptul „cal de rasă“, la fel cum „de rasă“ califică conceptul „cal“. În realitate, numai „de rasă“ este o notă de acest gen; prin intermediul cuvîntului „patru“ enunțăm ceva despre un concept¹³⁴.

§ 53. Prin proprietățile enunțate despre un concept nu înțeleg, desigur, notele care alcătuiesc conceptul. Acestea din urmă sînt proprietăți ale lucrurilor care cad sub concept, și nu ale conceptului însuși¹³⁵. De exemplu, „dreptunghic“ nu este o proprietate a conceptului „triunghi dreptunghic“, dar propoziția că nu există nici un triunghi dreptunghic rectiliniu echilateral exprimă o proprietate a conceptului „triunghi dreptunghic rectiliniu, echilateral“¹³⁶; ea îi atribuie numărul zero¹³⁷.

Sub acest raport, existența este analoagă numărului. Afirmarea existenței nu este de fapt nimic altceva decît negarea numărului zero¹³⁸. Întrucît existența este o proprietate a conceptului, demonstrația ontologică a existenței lui Dumnezeu nu-și atinge ținta. La fel de puțin ca și existența este însă unicitatea o notă a conceptului „Dumnezeu“. Unicitatea nu poate servi în vederea definiției acestui concept, tot așa cum nici soliditatea, vastitatea și comoditatea unei case nu pot fi utilizate împreună cu pietrele, mortarul și grinzile, în vederea construirii sale¹³⁹. Cu toate acestea, din faptul că ceva este proprietate a unui concept nu se poate conchide în mod general că din concept, adică din notele acestuia, ea nu s-ar putea infera. În anumite împrejurări aceasta este cu putință, așa cum, de exemplu, din calitățile materialului de construcție putem trage de multe ori o concluzie cu privire la durabilitatea unui edificiu. De aceea, ar fi excesiv să pretindem că din notele unui concept nu se poate infera nimic asupra unicității sau existenței; numai că aceasta nu se poate produce vreodată în mod la fel de imediat ca atunci cînd nota unui concept este atribuită ca proprietate unui obiect subsumat acestui concept¹⁴⁰.

Tot astfel, ar fi o eroare a nega că existența și unici-

tatea pot fi uneori note ale unor concepte. Ele nu sînt însă note ale acelui concept căruia, potrivit uzanțelor lingvistice, i s-ar putea atribui. Atunci cînd, de exemplu, toate conceptele cărora li se subsumează un același unic obiect sînt strînse sub un concept¹⁴¹, unicitatea constituie o notă a acestuia din urmă. Sub conceptul menționat cade, de exemplu, conceptul „satelit al Pămîntului“, dar nu cade însuși corpul ceresc care poartă același nume. Așadar, putem subsuma un concept unui alt concept mai înalt, unui concept, ca să spunem așa, de ordinul doi. Această relație nu trebuie însă confundată cu relația de subordonare.

§ 54. Acum devine posibil să definim unitatea în mod satisfăcător. La p. 7 a manualului său menționat anterior, E. Schröder spune: „Acel nume generic sau concept se va chema denumirea numărului format în modul arătat; el constituie esența unității sale“.

Într-adevăr, n-ar fi oare cel mai potrivit să numim un concept unitate în raport cu numărul care îi revine? Am putea întrezări atunci un sens al aserțiunilor după care unitatea se delimitează față de mediul său înconjurător și este indivizibilă. Într-adevăr, conceptul căruia i se atribuie numărul delimitează în general, într-un anume mod, ceea ce cade sub el. Conceptul „literă a cuvîntului *cinci*“ îl delimitează pe *c* față de *i*, pe *i* față de *n*, ș.a.m.d. Conceptul „silabă a cuvîntului *cinci*“ desprinde cuvîntul ca un întreg care este indivizibil, în sensul că părțile nu mai cad sub conceptul „silabă a cuvîntului *cinci*“. Nu toate conceptele au aceeași însușire. Spre a lua un exemplu, putem divide în variate feluri ceea ce cade sub conceptul roșu, fără ca părțile să înceteze să cadă sub același concept. Unui asemenea concept nu-i revine vreun număr finit¹⁴². În consecință, propoziția privind caracterul delimitat și indivizibilitatea unității poate fi formulată astfel:

Numai un concept care delimitează în mod determinat ceea ce subsumează și care nu permite o divizare arbitrară poate fi unitate în raport cu un număr finit.

Vedem însă că indivizibilitatea are aici o semnificație specială.

Acum putem înțelege cu ușurință cum se pot împăca între ele identitatea și discernabilitatea unităților. Cuvîntul „unitate“ este folosit aici în două sensuri. Unitățile sînt identice în accepția explicată mai sus a acestui cuvînt. În propoziția „Iupiter are patru sateliți“, unitatea este „satelit al lui Iupiter“. Sub acest concept cade atît satelitul I, cît și sateliții II, III și IV. Ca atare, putem spune: unitatea la care se raportează I este identică unității la care se raportează II, și așa mai departe. Aici avem identitatea. Atunci cînd se afirmă însă discernabilitatea unităților, înțelegem prin aceasta caracterul distinct al lucrurilor numărate.

IV. Conceptul de număr¹⁴³

Fiecare număr individual este un obiect de sine-stătător

§ 55. După ce am descoperit că aserțiunea numerică cuprinde un enunț despre un concept, putem încerca să completăm definițiile leibniziene ale numerelor individuale cu definiția lui 0 și cea a lui 1.

În mod evident, putem stipula: numărul 0 revine unui concept atunci cînd sub acesta nu cade nici un obiect. Aici însă, locul lui 0 pare a fi luat de particula „nici un“ care are aceeași semnificație. În consecință, este preferabilă următoarea formulare: numărul 0 revine unui concept atunci cînd propoziția că a nu cade sub acest concept este valabilă în general pentru orice a ^{143a}.

În mod similar s-ar putea spune: numărul 1 revine unui concept F atunci cînd propoziția că a nu cade sub F nu are loc în mod general, pentru orice a , și cînd din propozițiile:

„ a cade sub F “ și „ b cade sub F “

urmează în general că a și b sînt identici¹⁴⁴.

Ne mai rămîne să definim în cazul general trecerea de la un număr la numărul imediat următor. Să analizăm următoarea formulare: numărul $(n+1)$ revine conceptului F atunci cînd există un obiect a care cade sub F și este astfel încît numărul n revine conceptului „subsumat lui F , dar nu a ”¹⁴⁵.

§ 56. Aceste definiții par atît de firești în lumina rezultatelor noastre de pînă acum, încît se cere să explicăm de ce ele nu ne pot fi suficiente.

Ultima definiție este aceea care suscită dubii; într-adevăr, riguros vorbind, sensul expresiei „numărul n revine conceptului G ” ne este la fel de necunoscut ca și cel al expresiei „numărul $(n+1)$ revine conceptului F ”. Fără îndoială, prin intermediul acestei definiții, precum și al celei precedente, putem spune ce înseamnă

„numărul $1+1$ revine conceptului F ”,

iar după aceea, folosind această din urmă expresie, putem să determinăm sensul expresiei

„numărul $1+1+1$ revine conceptului F ”

și așa mai departe; însă — ca să dăm un exemplu pregnant — definițiile noastre nu ne permit nicicînd să decidem dacă unui concept îi revine cumva numărul Iulius Caesar, dacă acest faimos cuceritor al Galliei este sau nu este un număr. Mai departe, definițiile propuse nu ne ajută să demonstrăm că dacă numărul a revine conceptului F și numărul b revine aceluiași concept, atunci în mod necesar $a=b$. Expresia „numărul care revine conceptului F ” nu ar putea fi deci justificată și, în genere, ar fi imposibil să demonstrăm pe baza ei o identitate numerică, dat fiind că nu am fi în măsură să concepem un număr determinat. Numai în aparență am definit noi numărul 0, numărul 1; în realitate, nu am precizat decît sensul expresiilor

„numărul 0 revine”,
„numărul 1 revine”,

ceea ce nu ne permite totuși să distingem înăuntrul acestor expresii pe 0, pe 1, ca obiecte independente, recognoscibile¹⁴⁶.

§ 57. Aici este locul să analizăm mai atent afirmația noastră după care orice aserțiune numerică cuprinde un enunț despre un concept.

În propoziția „numărul 0 revine conceptului F“, 0 este numai o parte a predicatului, dacă considerăm conceptul F ca subiect real¹⁴⁷. Din acest motiv, am evitat să numesc un număr cum este 0 sau 1 sau 2 o proprietate a unui concept. Tocmai datorită faptului că nu formează decît o parte în ceea ce este enunțat, fiecare număr individual apare ca un obiect de sine-stătător¹⁴⁸. Am atras deja atenția asupra faptului că spunem „numărul 1“ și că astfel prin intermediul articolului hotărît, noi îl erijăm pe 1 în calitate de obiect. În aritmetică, această existență independentă apare la fiecare pas, de exemplu, în egalitatea $1+1=2$. Întrucît în cele de față noi urmărim să înțelegem conceptul de număr în modul în care el este utilizat în știință, nu trebuie să ne tulbure faptul că în utilizarea lingvistică cotidiană numărul apare și în construcții atributive. Aceasta se poate evita întotdeauna. De exemplu, propoziția „Iupiter are patru sateliți“ se poate transpune în „numărul sateliților lui Iupiter este patru“. Aici, „este“ nu trebuie considerat ca simplă copulă, ca în cadrul propoziției „cerul este albastru“. O dovadă în acest sens este faptul că putem spune: „Numărul sateliților lui Iupiter este acela de patru“ sau „este numărul patru“. Aici, „este“ are sensul de „este identic“, „este același cu“. Avem așadar o identitate, care afirmă că expresia „numărul sateliților lui Iupiter“ desemnează același obiect ca și cuvîntul „patru“¹⁴⁹. Or, forma identității este forma dominantă în cuprinsul aritmeticii. Acest mod de a vedea lucrurile nu este contrazis de faptul că în cadrul cuvîntului „patru“ nu este cuprins nimic cu privire la Iupiter sau la Lună. Nici numele „Columb“ nu conține nimic cu privire la descoperire sau

la America și totuși un același ins este numit Columb și descoperitorul Americii¹⁵⁰.

§ 58. S-ar putea obiecta că despre obiectul pe care îl numim Patru sau îl numim Numărul sateliților lui Iupiter nu ne putem face nici o idee* ca despre ceva autonom. Dar răspunderea în acest sens nu o poartă autonomia pe care am conferit-o numărului. Desigur, adesea se admite cu ușurință că în reprezentarea a patru puncte ale unui zar intervine ceva ce ar corespunde cuvîntului „patru”; aceasta este însă o iluzie. Să ne gîndim la o livadă verde și să vedem dacă reprezentarea se schimbă atunci cînd înlocuim articolul nehotărit prin numeralul „una”. Nimic nu se adaugă în acest caz, în timp ce, dimpotrivă, cuvîntul „verde” își găsește un corespondent în cadrul reprezentării. Atunci cînd ne reprezentăm cuvîntul tipărit „fier”¹⁵¹ nu ne gîndim mai întîi la vreun număr. Dacă însă ne întrebăm din cîte litere este compus cuvîntul obținem numărul 4; dar prin aceasta reprezentarea nu devine cu nimic mai distinctă, ci poate rămîne absolut neschimbată. Numărul îl descoperim tocmai în conceptul de „literă a cuvîntului fier” care intervine aici. În cazul celor patru puncte ale unui zar situația se prezintă ceva mai confuz, întrucît conceptul ni se impune atît de imediat, datorită asemănării dintre punctele zarului, încît nici măcar nu mai observăm intervenția sa. Numărul nu poate fi reprezentat nici ca obiect autonom, nici ca proprietate a unui lucru exterior, întrucît el nu este nici ceva senzorial, nici proprietate a unui lucru exterior. Faptul este cît se poate de clar încă în cazul numărului 0. În zadar vom încerca să ne reprezentăm 0 stele vizibile. De bună seamă, ne putem gîndi la un cer acoperit în întregime de nori; dar aici nu avem nimic ce ar corespunde cuvîntului „stea” sau lui 0. Nu facem altceva decît să ne reprezentăm o stare de lucruri care poate ocaziona judecata: în clipa de față nu se poate vedea nici o stea.

* „Idee”, „reprezentare”, luată în sensul de imagine intuitivă.

§ 59. S-ar putea ca orice cuvînt — chiar și unul ca „numai“ — să ne evoce o anumită reprezentare; dar aceasta din urmă nu va corespunde neapărat conținutului cuvîntului; alți oameni pot avea o reprezentare cu totul diferită. În acest caz, ne vom reprezenta, desigur, o stare de lucruri ce trimite la o propoziție în cuprinsul căreia apare respectivul cuvînt; sau, cum se mai poate întîmpla, cuvîntul rostit evocă în memorie cuvîntul scris.

Faptul are loc nu numai în cazul particulelor. Nu încape îndoială că nu avem vreo reprezentare a distanței dintre noi și Soare. Într-adevăr, chiar dacă știm regula care ne arată de cîte ori trebuie să multiplicăm un etalon de lungime, orice tentativă de a ne forma potrivit acestei reguli o imagine măcar în unele privințe adecvată este sortită eșecului. Dar acesta nu este un motiv de a ne îndoii de justetea calculului prin care am aflat distanța și nu ne împiedică în nici un fel să întemeiem raționamentele ulterioare pe existența acestei distanțe.

§ 60. Pînă și un lucru atît de concret cum este Pămîntul, noi nu ni-l putem reprezenta așa cum știm că este; ne mulțumim cu o sferă de mărime neînsemnată, care constituie pentru noi un simbol al Pămîntului, deși știm prea bine că ea diferă foarte mult de acesta. Dar, deși adesea reprezentarea noastră nu corespunde deloc intenției, noi judecăm cu un grad înalt de certitudine despre un obiect cum este Pămîntul, pînă și atunci cînd mărirea acestuia este și ea luată în considerație.

În mod frecvent, gîndirea ne duce dincolo de granițele reprezentabilului, fără ca prin aceasta să pierdem suportul raționamentelor noastre. Chiar dacă, așa cum s-ar părea, nouă, oamenilor, ne este cu neputință să gîndim fără reprezentări, conexiunea acestora din urmă cu ceea ce este gîndit poate rămîne absolut exterioară, arbitrară și convențională.

Așadar, chiar atunci cînd conținutul unui cuvînt nu este reprezentabil, nu avem vreun temei să-i contestăm orice semnificație sau să interzicem utilizarea lui. Impresia contrară apare tocmai datorită faptului că analizăm

cuvintele în mod izolat și căutăm astfel semnificația lor, luînd de aceea în această calitate o reprezentare. În consecință, cuvîntul pentru care nu găsim o imagine interioară corespunzătoare pare a fi lipsit de orice conținut. Or, întotdeauna trebuie să avem în vedere o propoziție completă. Numai în cadrul acesteia cuvintele au, propriu-zis, o semnificație. Imaginile lăuntrice care ne apar cumva cu acest prilej nu sînt obligate să corespundă componentelor logice ale judecății. Este de ajuns ca propoziția în întregul ei să aibă un sens; prin aceasta, părțile sale capătă la rîndul lor un conținut.

Această remarcă îmi apare a fi aptă să arunce o lumină asupra unor concepte dificile, cum este cel al infinitesimalelor*, iar valabilitatea ei nu se limitează la domeniul matematicii¹⁵³.

Autonomia pe care o atribuim numărului nu înseamnă că un numeral ar desemna ceva în afara contextului unei propoziții¹⁵⁴; prin aceasta, nu vreau decît să exclud folosirea lui în calitate de predicat sau atribut, folosire care îi modifică într-o anumită măsură semnificația.

§ 61. Dar, cum poate ni se va obiecta, chiar dacă Pămîntul nu este propriu-zis reprezentabil, el rămîne totuși un lucru exterior, care ocupă un loc determinat; unde este însă numărul 4? El nu este nici în afara noastră, nici înăuntrul nostru. Aceasta este adevărat în sens spațial. A determina locul numărului 4 n-are nici un sens; dar de aici urmează numai că acesta nu este un obiect spațial, și nu urmează că în genere el nu este un obiect. Nu orice obiect este undeva. Nici reprezentările noastre** nu sînt, în acest sens, înăuntrul nostru (subcutaneu). Înăuntrul nostru se găsesc celule ganglionare, corpuscule sanguine ș.a., dar nu reprezentări. În cazul

* Problema este de a defini sensul unei egalități

$$d f(x) = g(x) dx,$$

dar nu de a indica un segment mărginit de două puncte distincte, a cărui lungime să fie dx .

** Înțelegînd acest cuvînt în sens pur psihologic, nu psihofizic.

lor, predicatele spațiale nu sînt aplicabile: o reprezentare nu este situată la dreapta sau la stînga alteia; reprezentările nu se află între ele la distanțe măsurabile în milimetri. Spunînd totuși că reprezentările se află în noi, vrem prin aceasta să le desemnăm ca subiective.

Dar, chiar dacă admitem că subiectivul nu are poziție, cum este cu putință ca ceva obiectiv cum este numărul 4 să nu fie nicăieri? Eu afirm că aici nu este nici o contradicție. Numărul este într-adevăr exact același pentru toți cei care se ocupă cu el, dar aceasta nu are nimic de-a face cu spațialitatea. Nu orice obiect obiectiv¹⁵⁵ are un loc¹⁵⁶.

Spre a obține conceptul de număr¹⁵⁷ trebuie stabilit sensul unei identități numerice

§ 62. Cum ne vor fi date numerele, de vreme ce despre acestea nu putem avea vreo reprezentare sau intuiție? Cuvintele semnifică ceva numai în contextul unei propoziții. Așadar, problema este de a clarifica sensul unei propoziții în cuprinsul căreia figurează un numeral¹⁵⁸. Aceasta mai lasă încă loc arbitrarului. Dar noi am stabilit deja că numerele trebuie înțelese ca reprezentînd obiecte independente. În felul acesta dispunem de o specie de propoziții care trebuie să aibă un sens, și anume propozițiile care exprimă o recunoaștere. Dacă semnul a urmează să ne desemneze un obiect, trebuie să dispunem de un criteriu care să decidă în toate cazurile dacă b este același cu a , chiar dacă nu întotdeauna stă în puterea noastră să aplicăm acest criteriu. În cazul nostru, trebuie să definim sensul propoziției

„numărul ce revine conceptului F este același cu cel ce revine conceptului G “;

cu alte cuvinte, trebuie să redăm într-un alt mod conținutul acestei propoziții, fără a recurge la expresia

„numărul ce revine conceptului F “.

Vom da astfel un criteriu general pentru identitatea numerelor. După ce am căpătat un asemenea mijloc pentru a concepe un număr determinat și a-l recunoaște ca același, îi putem atribui un numeral în calitate de nume propriu¹⁵⁹.

§ 63. Un asemenea mijloc a fost indicat încă de către Hume*: „Cînd două numere se combină în așa fel încît unul are mereu o unitate care corespunde fiecărei unități a celuilalt, noi le declarăm egale“¹⁶⁰. Mai recent, se pare că în rîndul matematicienilor** a găsit un mare ecou opinia după care identitatea numerică trebuie definită prin intermediul corespondenței biunivoce. Dar de la bun început se ridică anumite dubii și dificultăți logice, pe care nu le putem ocoli fără a le supune unui examen.

Relația de identitate nu intervine numai în cazul numerelor. De aici pare să rezulte că ea nu trebuie definită special pentru cazul de față. S-ar admite, așadar, că conceptul de identitate a fost fixat în prealabil și că apoi pe baza lui și a conceptului de număr, trebuie să se poată deduce cînd numerele sînt identice între ele, fără să mai fim nevoiți a apela la o definiție specială.

Împotriva acestui punct de vedere trebuie să remarcăm că pentru noi conceptul de număr nu a fost precizat încă, el urmînd a fi determinat abia prin intermediul definiției noastre. Intenția noastră este de a construi conținutul unei judecăți care să poată fi privită ca o identitate, în așa fel încît fiecare membru al acestei identități să fie un număr¹⁶². Așadar, nu intenționăm a defini identitatea special pentru acest caz, ci vrem să obținem prin intermediul conceptului în prealabil cunoscut al identității ceea ce trebuie considerat ca identic. Desigur, o asemenea

* BAUMANN, *op. cit.*, vol. II, p. 565.

** Cf. E. SCHRÖDER, *op. cit.*, pp. 7—8; E. KOSSAK, *Die Elemente der Arithmetik, Programm des Friedrichs-Werder'schen Gymnasiums*, Berlin, 1872, p. 16; G. CANTOR, *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre*, Leipzig, 1883¹⁶¹.

definiție pare a fi cu totul neobișnuită, iar logicienii nu au examinat-o încă suficient; dar unele exemple pot arăta că ea nu este nemaiauzită¹⁶³.

§ 64. Judecata „dreapta a este paralelă cu dreapta „ q sau în simboluri:

$$a//b,$$

poate fi înțeleasă ca o identitate. În acest caz, obținem conceptul de direcție și spunem: „direcția dreptei a este identică cu direcția dreptei b “. Înlocuim așadar semnul $//$ prin semnul mai general $=$, transferind asupra lui a și b conținutul specific al primului semn¹⁶⁴. Noi scindăm conținutul într-un mod diferit de cel inițial, obținând astfel un nou concept¹⁶⁵. Ce-i drept, adesea lucrurile sînt înțelese exact pe dos, unii profesori definind dreptele paralele ca drepte avînd aceeași direcție. Propoziția: „Două drepte paralele cu a treia sînt paralele între ele“ poate fi atunci demonstrată cît se poate de comod, apelînd la o proprietate a identității, formulată analog. Numai că, din păcate, adevărata stare de lucruri este astfel răsturnată. Într-adevăr, tot ce este geometric trebuie, negreșit, să aparțină inițial intuiției. Întreb deci, dacă cineva are intuiția direcției unei drepte. Intuiția dreptei însăși, o are negreșit! Dar înăuntrul intuiției acestei drepte mai distingem oare și direcția ei? E greu de crezut. Conceptul în cauză este descoperit abia printr-o activitate intelectuală originată în intuiție. Dimpotrivă, asupra dreptelor paralele dispunem de o reprezentare¹⁶⁶. Acea demonstrație despre care am vorbit mai sus devine posibilă numai printr-o presupunere ilicită, introducînd în accepția cuvîntului „direcție“ ceea ce trebuie abia să fie demonstrat; într-adevăr, dacă propoziția „două drepte paralele cu a treia sînt paralele între ele“ ar fi falsă, $a//b$ nu ar putea fi transformată într-o identitate.

Tot astfel, pornind de la paralelismul planelor putem obține un concept care corespunde celui de direcție în cazul dreptelor. În lecturile mele, am constatat că în acest scop se folosește termenul de „orientare“. Din ase-

mănarea geometrică provine conceptul de formă, astfel că, de exemplu, în loc de a spune „ambele triunghiuri sînt asemenea“ spunem „ambele triunghiuri au o formă identică“, sau „forma unui triunghi este identică cu forma celui alt“. Și, la fel, din colinearitatea formelor geometrice putem extrage un concept căruia încă nu i s-a dat un nume.

§ 65. Acum, pentru a ajunge, de exemplu, de la paralelism* la conceptul de direcție, să încercăm următoarea definiție:

Propoziția

„dreapta a este paralelă cu dreapta b “

înseamnă:

„direcția dreptei a este identică cu direcția dreptei b “.

Această definiție se abate de la uzanțe în măsura în care aparent ea determină relația deja cunoscută de identitate, pe cînd în realitate este menită să introducă expresia „direcția dreptei a “, expresie care survine în cadrul ei numai în mod secundar¹⁶⁷. Pe această bază apare un alt dubiu, și anume dacă stipularea de mai sus nu poate duce la o contradicție față de legile cunoscute ale identității. Care sînt aceste legi? În calitate de adevăruri analitice, ele ar trebui să poată fi deduse din însuși conceptul ca atare¹⁶⁸. Or, Leibniz** introduce definiția:

„*Eadem sunt, quorum unum potest substitui alteri salva veritate*“,

pe care mi-o însușesc ca definiție a identității¹⁶⁹. Este indiferent dacă spunem „același“, ca Leibniz, sau dacă

* Spre a putea să mă exprim mai comod și spre a mă face înțeles cu mai multă ușurință, vorbesc aici despre paralelism. Esența acestor explicații poate fi transferată cu ușurință la cazul identității numerice.

** *Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis* (ed. Erdmann, p. 94).

spunem „egal“. „Același“ pare, c-i drept, să exprime o concordanță perfectă, în timp ce „egal“ pare să exprime o concordanță doar sub un anumit raport; putem adopta însă un mod de exprimare care să anihileze această diferență, spunînd, de pildă, „lungimea segmentelor este egală“ sau „este aceeași“, în loc de a spune „segmentele sînt egale în lungime“, și spunînd „culoarea suprafețelor este identică“, în loc de a spune „suprafețele sînt identice în culoare“. Tocmai așa am folosit mai sus cuvîntul în exemple¹⁷⁰. În fapt, toate legile identității sînt cuprinse în posibilitatea universală de substituire¹⁷¹.

Pentru a justifica încercarea noastră de definire a direcției unei drepte, ar trebui, așadar, să arătăm că dacă dreapta a este paralelă cu dreapta b putem înlocui peste tot

direcția lui a

prin

direcția lui b .

Lucrurile se simplifică datorită faptului că inițial nu avem despre direcția unei drepte nici un alt enunț decît că ea coincide cu direcția unei alte drepte. Așadar, nu ne-ar mai rămîne decît să arătăm posibilitatea înlocuirii în cadrul unei asemenea identități sau în cadrul conținuturilor pe care astfel de identități le pot avea în calitate de părți componente*. Toate celelalte tipuri de enunțuri privitoare la direcții urmează a fi explicate în prealabil; în vederea definițiilor lor putem emite regula care să asigure posibilitatea înlocuirii direcției unei drepte prin direcția unei alte drepte, paralelă cu cea dintîi.

§ 66. Dar împotriva definiției propuse se mai poate aduce o a treia obiecție. În cadrul propoziției

„direcția lui a este identică cu direcția lui b “,

* În cadrul unei judecăți ipotetice, de exemplu, o identitate a direcțiilor ar putea să figureze în calitate de condiție sau de consecință.

direcția lui a apare ca obiect* iar definiția noastră ne oferă un mijloc de recunoaștere a acestui obiect, în cazul cînd el s-ar înfățișa într-o altă deghizare, de pildă ca direcție a lui b . Dar acest mijloc nu dă satisfacție în toate cazurile. De exemplu, el nu ne permite să decidem dacă Anglia este aceeași cu direcția Pămîntului. Să ne fie scuzat acest exemplu, în aparență absurd! Dacă nimeni nu va confunda Anglia cu axa Pămîntului, cum e de la sine înțeles, aceasta nu se datorează totuși definiției noastre. Ea nu spune nimic cu privire la faptul dacă propoziția

„direcția lui a este identică cu q “

trebuie afirmată sau negată, atunci cînd însuși q nu este dat în forma „direcția lui b “. Conceptul de direcție ne lipsește, căci dacă l-am fi avut la dispoziție am fi putut stipula că, dacă q nu este o direcție atunci propoziția noastră trebuie negată, iar dacă q este o direcție atunci decide definiția noastră anterioară. Am fi înclinați să introducem definiția:

„ q este o direcție dacă există o dreaptă b , a cărei direcție este q “.

Dar acum este limpede că ne-am învîrtit în cerc. Pentru a putea aplica această definiție ar trebui să știm în fiecare caz în parte dacă propoziția

„ q este identică cu direcția lui b “

trebuia afirmată sau negată.

* Acest lucru ni-l indică articolul hotărît. Pentru mine, conceptul este un posibil predicat al unui conținut judicabil singular, în timp ce obiectul este un posibil subiect al acestuia. Dacă în propoziția „direcția axei telescopului este identică cu direcția axei Pămîntului“, considerăm ca subiect direcția axei telescopului, predicatul va fi „identic cu direcția axei Pămîntului“. Acesta este un concept. Dar direcția axei Pămîntului este numai o parte a predicatului; ea este un obiect, întrucît poate fi făcută și subiect¹⁷².

§ 67. Dacă am încerca să spunem: q este o direcție dacă se introduce prin intermediul definiției formulate mai sus, am privi modul în care obiectul q a fost introdus ca pe o proprietate a acestuia, ceea ce nu concordă cu realitatea¹⁷³. Definiția unui obiect, luată ca atare, nu spune de fapt nimic despre acesta, ci stipulează semnificația unui semn. După aceasta, ea se transformă într-o judecată care se referă la obiectul în cauză, dar de această dată nu-l mai introduce și stă în același rînd cu celelalte enunțuri privitoare la el¹⁷⁴. Dacă am adopta această soluție, am presupune că un obiect nu poate fi dat decît într-un unic mod; într-adevăr, în caz contrar, din faptul că q nu a fost introdus prin intermediul definiției noastre nu ar urma că q nu putea fi introdus astfel. Toate identitățile s-ar reduce la faptul că ceea ce ne este dat nouă într-un același mod trebuie să fie recunoscut ca unul și același, ceea ce însă este atît de evident și de steril încît nu merită să mai fie enunțat. În fapt, nici nu s-ar trage vreo concluzie distinctă de una sau alta din premisele noastre. Aplicabilitatea multilaterală și importantă a identităților se bazează, dimpotrivă, tocmai pe faptul că sîntem în măsură să recunoaștem un lucru cu toate că el a fost dat în moduri diferite¹⁷⁵.

§ 68. Întrucît prin procedeele de mai sus nu putem obține un concept precis al direcției, după cum din aceleași motive nu putem obține un concept precis al numărului, vom încerca un alt drum. Dacă dreapta a este paralelă cu dreapta b , extensiunea conceptului „dreaptă paralelă cu dreapta a ” este identică cu extensiunea conceptului „dreaptă paralelă cu dreapta b ”; reciproc, dacă extensiunile conceptelor sus-menționate sînt identice, a este paralelă cu b ¹⁷⁶. Să încercăm deci să definim:

direcția dreptei a este extensiunea conceptului „paralel cu dreapta a ”;

forma triunghiului t este extensiunea conceptului „asemenea cu triunghiul t ”.

Pentru a aplica aceasta în cazul nostru, va trebui ca în locul dreptelor sau triumphiurilor să punem concepte, iar în locul paralelismului sau asemănării să punem posibilitatea corelării biunivoce a obiectelor subsumate unuia dintre concepte cu obiectele subsumate celuilalt. Pentru concizie, voi spune că conceptul **F** este echinumeric cu conceptul **G** atunci cînd există această posibilitate¹⁷⁷; mă văd însă obligat să precizez că acest cuvînt trebuie privit ca un mijloc de desemnare ales în mod arbitrar, semnificația termenului urmînd să fie extrasă nu pe baza etimologiei sale, ci pe baza stipulării de mai sus.

În consecință, introduc următoarea definiție:

Numărul care revine conceptului **F** este extensiunea* conceptului „echinumeric cu conceptul **F**“¹⁷⁸.

§ 69. Poate că adecvarea acestei definiții nu va fi evidentă de la prima vedere. Într-adevăr, prin extensiune a unui concept nu înțelegem oare altceva? Ceea ce înțelegem prin extensiune rezultă limpede pe baza aserțiunilor inițiale ce se pot emite cu privire la extensiunile conceptelor. Ele sînt următoarele:

1. identitatea,
2. faptul că una dintre ele este mai cuprinzătoare decît cealaltă.

* Cred că în loc de „extensiune a conceptului“ am fi putut spune pur și simplu „concept“. S-ar putea aduce însă două obiecții:

1. Aceasta ar contrazice afirmația mea anterioară după care numerele individuale sînt obiecte, așa cum ne indică deopotrivă folosirea articolului hotărît în expresii ca „numărul doi“, imposibilitatea de a vorbi despre unu-uri, doi-uri etc. la plural, precum și faptul că numărul constituie numai o parte a predicatului dintr-o aserțiune numerică;

2. conceptele pot avea extensiuni identice fără ca ele însele să coincidă.

Eu cred că ambele obiecții pot fi înlăturate; dar aceasta ne-ar putea abate prea mult de la punctul de pornire. Voi presupune că știm ceea ce este extensiunea unui concept¹⁷⁹.

Dar propoziția:

extensiunea conceptului „echinumeric cu conceptul F ” este identică cu extensiunea conceptului „echinumeric cu conceptul G ”

este adevărată atunci și numai atunci cînd propoziția „conceptului F îi revine același număr ca și conceptului G ”

este de asemenea adevărată. Așadar, avem aici o concordanță deplină.

Desigur, nu obișnuim a spune că un număr este mai cuprinzător decît un altul în sensul în care extensiunea unui concept este mai cuprinzătoare decît extensiunea altuia; dar este de asemenea exclus cu desăvîrșire ca

extensiunea conceptului „echinumeric cu conceptul F ” să fie mai cuprinzătoare decît

extensiunea conceptului „echinumeric cu conceptul G ”. Dimpotrivă, cînd toate conceptele echinumerice cu conceptul G sînt echinumerice și cu conceptul F , atunci, invers, toate conceptele echinumerice cu conceptul F sînt echinumerice și cu conceptul G . În accepția de aici, „mai cuprinzător” nu trebuie confundat cu „mai mare”, care are loc în cazul numerelor.

Desigur, se mai poate concepe și cazul în care extensiunea conceptului „echinumeric cu conceptul F ” este mai cuprinzătoare sau mai puțin cuprinzătoare decît extensiunea unui alt concept, iar aceasta din urmă, potrivit definiției noastre, nu poate fi un număr; deși nu obișnuim a spune că un număr este mai cuprinzător sau mai puțin cuprinzător decît extensiunea unui concept, nimic nu ne împiedică să adoptăm această terminologie, dacă ar fi cazul.

Completare și atestare a definiției noastre

§ 70. Definițiile se atestă prin rodnicia lor. Cele ce ar putea fi lăsate la fel de bine la o parte fără a se afecta prin aceasta mersul demonstrației trebuie abandonate ca fiind absolut fără valoare.

Să vedem, aşadar, dacă din definiţia pe care am dat-o numărului ce revine conceptului F se pot deriva proprietăţi cunoscute ale numerelor. În cele de faţă, ne vom limita la proprietăţile cele mai simple.

În acest scop, se impune să analizăm cu mai multă minuţie echinumericitatea. Noi am definit-o prin intermediul corespondenţei biunivoce iar acum trebuie explicat modul în care înţeleg această expresie, întrucît, aşa cum se poate bănuî cu uşurinţă, ea conţine un element intuitiv¹⁸⁰.

Să luăm următorul exemplu. Cînd un chelner vrea să fie sigur că va pune pe masă tot atîtea cuţite cîte farfurii, el nu are nevoie să numere nici cuţitele, nici farfuriile; este de ajuns să pună în dreapta fiecărei farfurii un cuţit şi să aibă grijă ca fiecare cuţit de pe masă să se afle la dreapta unei farfurii. Farfuriile şi cuţitele sînt astfel corelate biunivoc între ele, pe baza uneia şi aceleiaşi relaţii poziţionale. Dacă gîndim că în propoziţia

„ a este aşezat imediat la dreapta lui A “,

a şi A sînt înlocuite mereu prin alte şi alte obiecte, atunci cea parte a conţinutului care rămîne neschimbată în cursul acestei operaţii constituie esenţa relaţiei. Acum să generalizăm.

Atunci cînd dintr-un conţinut judicabil care priveşte un obiect a şi un obiect b lăsăm la o parte pe a şi pe b , ceea ce ne rămîne este un concept de relaţie care, de aceea, este completabil într-un îndoit mod. Dacă din propoziţia

„Pămîntul este mai greu decît Luna“

detaşăm „Pămîntul“, obţinem conceptul „mai greu decît Luna“. Dacă, dimpotrivă, detaşăm „Luna“, dobîndim conceptul „mai uşor decît Pămîntul“. Dacă le lăsăm la o parte pe ambele, ceea ce rămîne este un concept de relaţie care, luat în sine, are tot atît de puţin sens ca şi conceptul simplu: el reclamă întotdeauna o completare spre a forma un conţinut judicabil. Dar completarea se poate perfecta în diferite moduri: în locul Pămîntului şi Lunei

eu pot pune, de exemplu, Soarele și Pământul, și tocmai prin aceasta se creează posibilitatea detașării¹⁸¹.

Diferitele perechi individuale de obiecte corelate se raportează la conceptul de relație în același fel — am putea spune, ca subiecte — în care obiectul individual se raportează la conceptul căruia i se subsumează. Aici, subiectul este compus. Uneori, când relația este convertibilă, această trăsătură capătă o expresie lingvistică, cum se întâmplă în propoziția „Peleu și Thetis erau părinții lui Ahile”. Dimpotrivă, ar fi imposibil să redăm, de exemplu, conținutul propoziției „Pământul este mai greu decât Luna”, astfel încît „Pământul și Luna” să apară ca subiect compus, întrucît particula „și” indică întotdeauna o echivalare sub un raport determinat. Dar aceasta nu afectează cu nimic fondul chestiunii.

Conceptul de relație aparține, așadar, la fel ca și conceptul simplu, logicii pure. Aici nu intră în considerație conținutul particular al relației, ci numai forma logică. Adevărul oricărei enunțări despre aceasta din urmă este analitic și cunoscut *a priori*¹⁸². Lucrul este valabil pentru conceptele de relație la fel ca pentru celelalte.

După cum

„*a* cade sub conceptul *F*”

este forma generală a unui conținut judicabil raportat la un obiect *a*, tot astfel putem considera

„*a* stă în relația φ față de *b*”

ca formă generală pentru un conținut judicabil referitor la obiectul *a* și obiectul *b*¹⁸³.

§ 71. Dacă fiecare obiect subsumat conceptului *F* se află în relația φ față de un obiect subsumat conceptului *G* și dacă pentru fiecare obiect de sub *G* avem un obiect de sub *F* ce stă în relația φ față de primul, atunci, obiec-

* Nu trebuie să confundăm acest caz cu cel în care „și” leagă numai în aparență subiectele, în timp ce de fapt el leagă două propoziții.

tele de sub F sînt corelate cu cele de sub G prin relația φ ¹⁸⁴.

Se mai poate ridica întrebarea: ce semnifică expresia

„fiecare obiect de sub F stă în relația φ față de un obiect de sub G “¹⁸⁵,

în cazul cînd sub F nu cade nici un obiect? Prin aceasta, eu înțeleg faptul că cele două propoziții

„ a cade sub F “

și

„ a nu stă în relația φ față de nici un obiect care cade sub G “¹⁸⁶

nu pot avea loc amîndouă, indiferent de ceea ce desemnează a , așa că sau prima, sau a doua, sau ambele sînt false. De aici rezultă că atunci cînd nu există vreun obiect subsumat lui F ¹⁸⁷, „orice obiect de sub F stă în relația φ față de un obiect de sub G “, deoarece în acest caz prima propoziție, și anume

„ a cade sub F “

trebuie să fie întotdeauna negată, oricare ar fi a .

Tot astfel,

„față de fiecare obiect de sub G un obiect de sub F stă în relația ω “¹⁸⁸

semnifică faptul că cele două propoziții

„ a cade sub G “

și

„nici un obiect de sub F nu stă în relația φ față de a “

nu sînt compatibile, oricare ar fi a ¹⁸⁹.

§ 72. Am văzut deci în ce condiții obiectele subsumate conceptelor F și G sînt puse în corespondență prin intermediul relației φ . Aici, această corelare trebuie să fie

biunivocă. Prin aceasta, eu înțeleg faptul că următoarele două propoziții au loc :

1. dacă d stă în relația φ față de a , și dacă d stă în relația φ față de e , atunci în mod general, pentru orice d , a și e , a este același cu e ;¹⁹⁰

2. dacă d se află în relația φ față de a , și dacă b se află în relația φ față de a , atunci, în mod general, pentru orice d , b și a , d este același cu b .¹⁹¹

Prin aceasta noi am redus corespondența biunivocă la relații pur logice și putem acum defini:

Expresia

„conceptul F este echinumeric cu conceptul G “

are aceeași semnificație ca expresia

„există o relație φ care corelează biunivoc obiectele care cad sub conceptul F cu obiectele care cad sub conceptul G “¹⁹².

Repet definiția inițială:

numărul care revine conceptului F este extensiunea conceptului „echinumeric cu conceptul F “¹⁹³

și adaug:

expresia

„ n este un număr“

are aceeași semnificație ca expresia

„există un concept astfel încât n este numărul care îi revine“¹⁹⁴.

Conceptul de număr a fost așadar definit și deși în aparență a fost definit prin el însuși, în realitate nu s-a comis vreo eroare, întrucât „numărul care revine conceptului F “ a fost în prealabil definit.

§ 73. În continuare, vrem să arătăm că numărul care revine conceptului F este identic cu numărul care revine

conceptului G atunci cînd conceptul F este echinumeric cu conceptul G ¹⁹⁵. Deși această afirmație pare a fi pur tautologică, în realitate lucrurile nu stau așa, întrucît semnificația cuvîntului „echinumeric“ nu derivă din semnificația părților componente, ci din definiția dată mai sus.

Conform definiției noastre trebuie să arătăm că extensiunea conceptului „echinumeric cu conceptul F “ este aceeași cu extensiunea conceptului „echinumeric cu conceptul G “, atunci cînd conceptul F este echinumeric cu conceptul G ¹⁹⁶. Cu alte cuvinte: trebuie demonstrat că, admițînd ipoteza, următoarele propoziții sînt valabile în mod general:

dacă conceptul H este echinumeric cu conceptul F ,
atunci el este echinumeric și cu conceptul G ;

și

dacă conceptul H este echinumeric cu conceptul G ,
atunci el este echinumeric și cu conceptul F ¹⁹⁷.

Prima propoziție revine la faptul că există o relație care pune în corespondență biunivocă obiectele de sub conceptul H cu obiectele de sub conceptul G în cazul cînd există o relație φ care pune în corespondență biunivocă obiectele de sub conceptul F cu obiectele de sub conceptul G și cînd există o relație ψ care pune în corespondență biunivocă obiectele de sub conceptul H cu obiectele de sub conceptul F ¹⁹⁸. Faptul devine mai transparent dacă ordonăm literele după cum urmează:

$$H\psi F\varphi G.$$

O asemenea relație poate fi introdusă realmente: ea rezidă în conținutul

„există un obiect care se află față de c în relația ψ
și față de b în relația φ “

atunci cînd detașăm c și b (adică le privim ca puncte ale relației). Se poate arăta că această relație este biuni-

vocă și că ea corelează obiectele subsumate conceptului H cu obiectele subsumate conceptului G^{199} .

În mod similar, poate fi demonstrată și cealaltă propoziție²⁰⁰. Sperăm că aceste indicații vor fi suficiente pentru a se admite că nu avem nevoie să împrumutăm de la intuiție vreun temei demonstrativ și că definițiile noastre pot fi utile.

§ 74. Putem trece acum la definirea fiecărui număr în parte.

Întrucît conceptului „neidentic cu sine” nu i se subsumează nimic, voi defini:

0 este numărul care revine conceptului „neidentic cu sine”²⁰¹.

S-ar putea ca cineva să fie șocat de faptul că eu vorbesc aici despre un concept. Poate ni se va obiecta că aici este o contradicție, și că aceasta amintește de vechile noastre cunoștințe — fierul de lemn și cercul pătrat. În fapt, eu cred că acestea din urmă nu sînt chiar atît de nocive cum s-a spus. Ce-i drept, ele nu vor avea nicidecum o utilitate; dar, în același timp, ele nu pot nici să cauzeze vreun rău, dacă nu presupunem că li se subsumează ceva; or, simpla întrebuintare a conceptului nu atrage după sine această presupunere. Nu întotdeauna faptul că un concept conține o contradicție este atît de evident încît să nu reclame o investigație; pentru aceasta trebuie să avem mai întîi acel concept și să-l tratăm logic. Tot ce i se poate cere unui concept din punctul de vedere al logicii și avînd în vedere rigoarea demonstrației este delimitarea sa precisă, astfel încît pentru fiecare obiect să se poată determina dacă acesta cade sau nu sub concept. Amintita exigență este satisfăcută întru totul de conceptele care conțin o contradicție, cum este conceptul „ne-

* La fel și reciproca acesteia: dacă numărul care revine conceptului F este același cu numărul care revine conceptului G , atunci conceptul F este echinumeric cu conceptul G^{200} .

identic cu sine“; într-adevăr, despre orice obiect noi știm că nu cade sub un atare concept²⁰².

Eu folosesc cuvîntul „concept“ astfel încît

„ a cade sub conceptul F “

este forma generală a unui conținut judicabil care se referă la un obiect a și care rămîne judicabil orice am pune pentru a ²⁰⁴. Iar în acest sens

„ a cade sub conceptul «neidentic cu sine»“

înseamnă același lucru ca

„ a este neidentic cu sine“

sau

„ a nu este identic cu a “²⁰⁵.

În vederea definirii lui 0 aș fi putut lua orice alt concept sub care nu cade nimic. Pe mine mă interesa însă să aleg un concept despre care aceasta să se poată demonstra în mod pur logic; or, „neidentic cu sine“ se recomandă în mod firesc ca cel mai convenabil în acest scop; pentru „identic“ am adoptat definiția lui Leibniz, introdusă mai sus, definiție care este pur logică²⁰⁶.

* Cu totul altceva este definiția unui obiect pe baza unui concept căruia i se subsumează. Expresia „cea mai mare fracție subunitară“, de exemplu, nu are un conținut, deoarece articolul hotărît pretinde indicarea unui obiect determinat. Dimpotrivă, conceptul „fracție mai mică decît 1 și astfel încît nici o fracție mai mică decît 1 nu e mai mare ca ea“ este la adăpost de orice obiecții și, pentru a putea să demonstrăm că nu există o asemenea fracție, trebuie să recurgem la însuși acest concept, deși el conține o contradicție. Dacă am vrea însă să definim pe baza acestui concept un obiect care cade sub el ar fi necesar, desigur, să arătăm în prealabil două lucruri diferite:

1. că sub acest concept cade un obiect;
2. că sub el cade numai un obiect.

Intrucît însă prima dintre aceste propoziții este din capul locului falsă, expresia „cea mai mare fracție subunitară“ este lipsită de sens²⁰⁷.

§ 75. Pe baza stipulărilor anterioare se poate demonstra acum că orice concept sub care nu cade nimic este echinumeric cu orice concept sub care nu cade nimic, și numai cu un asemenea concept²⁰⁷; de aici urmează că 0 este numărul care revine unui asemenea concept și că nici un obiect nu cade sub un concept căruia îi revine numărul 0²⁰⁸.

În ipoteza că nici un obiect nu se subsumează conceptului F și nici conceptului G , va trebui să apelăm, spre a demonstra echinumericitatea, la o relație φ pentru care sînt valabile propozițiile :

Orice obiect subsumat lui F stă în relația φ cu un obiect subsumat lui G ; cu orice obiect subsumat lui G un obiect subsumat lui F stă în relația φ .

Conform celor spuse înainte despre semnificația expresiei de mai sus, în ipotezele asumate, orice relație respectivă satisface aceste condiții; identitatea care, în plus, este biunivocă, le satisface și ea. Într-adevăr, cele două cerințe stipulate anterior sînt îndeplinite.

Dacă, dimpotrivă, sub G cade un obiect, de exemplu a , în timp ce sub F nu cade nici unul, atunci amîndouă propozițiile

„ a cade sub G “

și

„nici un obiect care cade sub F nu stă față de a în relația φ “

sînt compatibile pentru orice relație φ ; într-adevăr, prima propoziție este adevărată conform primei ipoteze, iar a doua este adevărată conform celei de-a doua ipoteze. Căci dacă nu există vreun obiect subsumat lui F , atunci nu există nici un obiect de acest gen care să stea față de a într-o relație oarecare. Așadar, nu există nici o relație care, potrivit definiției noastre, să coreleze obiectele subsumate lui F cu cele subsumate lui G și, ca atare, conceptele F și G nu sînt echinumerice²⁰⁹.

§ 76. Voi defini acum relația în care stau doi membri vecini oarecari ai șirului numerelor naturale. Propoziția

„există un concept F și un obiect x ce i se subsumează astfel încît numărul ce revine conceptului F este n și numărul ce revine conceptului «subsumat lui F dar nu identic cu x » este m “,

înseamnă același lucru ca

„ n succede imediat lui m în șirul numerelor naturale“²¹⁰.

Evit expresia „ n este *succesorul* imediat al lui m “. Întrucît justificarea articolului hotărît ar reclama demonstrarea prealabilă a două propoziții*. Din același motiv, eu încă nu ajung să spun aici „ $n = m + 1$ “, căci prin însăși utilizarea semnului identității ($m + 1$) este desemnat ca obiect.

§ 77. Spre a ajunge acum la numărul 1 trebuie în primul rînd să arătăm că există ceva ce succede imediat lui 0 în șirul numerelor naturale²¹¹.

Să considerăm conceptul — sau, dacă preferăm, predicatul — „identic cu 0“. Acestui concept i se subsumează numărul 0. Conceptului „identic cu 0 dar nu identic cu 0“, din contra, nu i se subsumează vreun obiect, astfel încît numărul ce revine acestui concept este 0. Avem deci un concept, „identic cu 0“, și un obiect, 0, ce i se subsumează, despre care au loc:

numărul ce revine conceptului „identic cu 0“ este identic cu numărul ce revine conceptului „identic cu 0“; numărul ce revine conceptului „identic cu 0 dar nu identic cu 0“ este numărul 0.

În consecință, conform definiției noastre, numărul ce revine conceptului „identic cu 0“ succede imediat lui 0 în șirul numerelor naturale.

* A se vedea nota de la p. 124.

Dacă definim acum:

1 este numărul ce revine conceptului „identic cu 0“, ultima propoziție o putem exprima astfel:

1 succede imediat lui 0 în șirul numerelor naturale²¹².

Poate că nu este inutil să observăm că definiția lui 1 nu presupune, în vederea justificării sale obiective, un fapt observat*; într-adevăr, necesitatea satisfacerii anumitor condiții subiective pentru ca definiția să devină pentru noi posibilă se confundă lesne cu faptul că percepțiile senzoriale ne sugerează definiția în cauză**. Chiar dacă ar fi așa, propozițiile derivate nu încetează a fi a priori. Printre asemenea condiții se numără, de exemplu, și faptul că o cantitate suficientă de sînge avînd compoziția adecvată irigă creierul — cel puțin, după cîte știm; dar adevărul ultimei noastre propoziții este independent de aceasta; el continuă să subziste chiar și atunci cînd faptul menționat nu mai are loc²¹³; și chiar dacă ar fi ca toate ființele raționale să se cufunde vreodată într-un somn hibernal, adevărul propozițiilor nu ar fi suprimat în tot acest timp, ci ar rămîne absolut intact. Adevărul unei propoziții nu rezidă în faptul că aceasta din urmă este gîndită²¹⁴.

§ 78. Voi enumera aici unele propoziții care se demonstrează prin intermediul definițiilor noastre. Cititorul va sesiza cu ușurință cum se pot efectua demonstrațiile.

1. Dacă a succede imediat lui 0 în șirul numerelor naturale, atunci $a=1$ ²¹⁵.

2. Dacă 1 este numărul care revine unui concept, există un obiect subsumat acestuia din urmă²¹⁶.

3. Dacă 1 este numărul ce revine unui concept F , dacă obiectul x se subsumează conceptului F și dacă y se subsumează conceptului F , atunci $x=y$; cu alte cuvinte, x este atunci același cu y ²¹⁷.

* O propoziție non-generală.

** Cf. B. ERDMANN, *Die Axiome der Geometrie*, p. 164.

4. Dacă unui concept F i se subsumează un obiect și dacă din faptul că x se subsumează conceptului F și y se subsumează conceptului F se poate infera în mod general că $x = y$, atunci numărul ce revine conceptului F este 1^{218} .

5. Relația lui m față de n instituită prin intermediul propoziției:

„ n succede imediat lui m în șirul numerelor naturale” este o relație biunivocă²¹⁹.

Prin aceasta încă nu se afirmă că pentru fiecare număr există un altul care îi succede imediat sau căruia îi succede imediat în șirul numerelor naturale.

6. Orice număr cu excepția lui 0 succede imediat unui număr în șirul numerelor naturale²²⁰.

§ 79. Acum, pentru a fi în măsură să demonstrăm că fiecărui număr (n) din șirul numerelor naturale îi succede imediat un număr²²¹, trebuie să indicăm un concept căruia acesta din urmă îi revine. Vom alege în această calitate

„element al șirului de numere naturale terminat cu n ”, concept pe care va trebui mai întâi să-l definim.

Voi începe prin a repeta cu unele modificări de formulare definiția succesiunii într-un șir, pe care am dat-o în lucrarea mea *Begriffsschrift*.

Propoziția

„dacă orice obiect față de care x stă în relația φ cade sub conceptul F , și dacă din faptul că d cade sub conceptul F urmează în mod general, pentru orice d , că orice obiect față de care d stă în relația φ cade sub conceptul F , atunci, oricare ar fi conceptul F , y cade sub F ”

înseamnă același lucru ca

„ y succede în φ — șir lui x ”

și ca

„ x precede în φ — șir lui y ”²²²

§ 80. Referitor la aceasta nu va fi de prisos să facem unele observații. Întrucît nu am definit relația φ , șirul nu trebuie conceput neapărat în forma unei ordonări spațiale sau temporale, deși aceste cazuri nu sînt excluse²²³.

S-ar putea considera, eventual, că o altă definiție este mai naturală, de exemplu următoarea: dacă pornind de la x ne îndreptăm permanent atenția de la un obiect la un altul față de care primul stă în relația φ , și dacă în acest mod se ajunge în cele din urmă la y , spunem că y succede în φ —șir lui x .

Acesta este un mod de a aborda problema, nu o definiție. Atingerea lui y prin deplasarea atenției noastre poate depinde de diverse circumstanțe subiective, de exemplu de timpul de care dispunem sau de stadiul cunoașterii noastre. Faptul că y succede lui x în cadrul φ —șirului nu are în genere nimic de-a face cu atenția noastră și cu condițiile dirijării ei, ci ține de natura lucrului înșuși, tot așa cum frunza verde reflectă anumite raze de lumină, indiferent dacă ele cad sau nu pe retina ochiului meu și suscită ori nu o senzație, sau tot așa cum un grăunte de sare este solubil în apă, indiferent dacă l-am aruncat ori nu în apă, și indiferent dacă am observat ori nu fenomenul respectiv, rămînînd solubil chiar dacă nici nu am posibilitatea să fac vreo experiență în acest sens²²⁴.

Definiția mea permite deplasarea problemei din domeniul posibilităților subiective în domeniul determinării obiective. Într-adevăr, faptul că din anumite propoziții decurge o altă propoziție este ceva obiectiv, ce nu depinde de legile mișcării atenției noastre și în raport cu care este indiferent dacă noi efectuăm într-adevăr respectivul raționament. Avem aici un criteriu universal de soluție a problemei, acolo unde ea poate fi pusă, chiar dacă în anumite cazuri dificultățile exterioare ne-ar putea împiedica să evaluăm soluția. Aceasta nu are nimic de-a face cu esența chestiunii²²⁵.

Nu întotdeauna se cere să parcurgem toți termenii șirului începînd cu termenul inițial și pînă la un anumit

obiect, pentru a căpăta certitudinea că acesta din urmă este succesorul primului. Dacă, de exemplu, se dă că în cadrul φ -șirului b succede lui a și c lui b , atunci, conform definiției noastre, putem trage concluzia că c succede lui a fără a mai fi măcar nevoie să cunoaștem termenii intermediari²²⁶.

Numai pe baza acestei definiții a succederii într-un șir devine posibil să reducem la legile generale ale logicii raționamentul de la n la $(n + 1)$, raționament care, în aparență, este specific matematicii²²⁷.

§ 81. Dacă în calitate de relație φ avem acea relație în care m este pus față de n prin propoziția

„ n succede imediat lui m în șirul numerelor naturale”, atunci, în loc de „ φ -șir” spunem „șir al numerelor naturale”.

Mai departe, definesc :

propoziția

„ y succede în φ -șir lui x , sau y este identic cu x ” înseamnă același lucru ca

„ y aparține φ -șirului care începe cu x ”
și ca

„ x aparține φ -șirului care se termină cu y ”.

În consecință, a aparține șirului de numere naturale terminat cu n atunci când n succede lui a în șirul numerelor naturale sau când el este identic cu a .

§ 82. Acum trebuie să arătăm că — dacă o anumită condiție, care nu a fost încă stipulată, este satisfăcută — numărul ce revine conceptului

„membru al șirului de numere naturale terminat cu n ” succede imediat lui n în șirul numerelor naturale²²⁸. Dar

* Atunci când n nu este un număr, numai n însuși aparține șirului de numere naturale care se termină cu n . Acest mod de exprimare nu trebuie să ne contrarieze!

prin aceasta a rezultat că există un număr care succede imediat lui n în şirul numerelor naturale, şi deci că nu există un membru ultim al acestui şir. Evident, această propoziţie nu poate fi întemeiată în mod empiric sau prin inducţie²²⁹.

Prezentarea demonstraţiei înseşi ne-ar duce prea departe. Ne vom mărgini să schiţăm mersul ei. Trebuie demonstrat că:

1. dacă a este succesor imediat al lui d în şirul numerelor naturale şi dacă pentru d avem:

numărul ce revine conceptului
„membru al şirului de numere naturale terminat
cu d “

succede imediat lui d în şirul numerelor naturale,

atunci avem pentru a :

numărul ce revine conceptului
„membru al şirului de numere naturale terminat
cu a “

succede imediat lui a în şirul numerelor naturale.

În al doilea rând, trebuie demonstrat că pentru 0 are loc ceea ce s-a enunţat în propoziţiile formulate mai sus cu privire la d şi la a ; pe această bază vom conchide că aceasta are loc şi pentru n , dacă n aparţine şirului de numere naturale ce începe cu 0²³⁰. Acest mod de raţionare este o aplicare a definiţiei pe care am dat-o expresiei

„ y succede lui x în şirul numerelor naturale“,

atunci când în calitate de concept F a fost luat acel enunţ comun²³¹ despre d şi a , în care 0 şi n iau locul lui d şi a .

§ 83. Spre a demonstra propoziţia (1) din secţiunea precedentă, trebuie să arătăm că a este numărul ce revine conceptului „membru al şirului de numere naturale terminat cu a , dar nu identic cu a “²³². Pentru aceasta trebuie mai întâi să demonstrăm că acel concept are o extensiune identică cu aceea a conceptului „membru al şirului de nu-

mere naturale terminat cu d ²³³. În acest scop, avem nevoie de propoziția că nici un obiect care aparține șirului de numere naturale ce începe cu 0 nu poate fi propriul lui succesor în cadrul șirului numerelor naturale²³⁴. Această trebuie să se demonstreze tot prin intermediul definiției pe care am dat-o succederii într-un șir, așa cum s-a indicat mai sus*.

Sîntem astfel obligați să atașăm: o condiție propoziției ce afirmă că numărul ce revine conceptului

„membru al șirului de numere naturale terminat cu n “ succede imediat lui n în șirul numerelor naturale, și anume condiția că n aparține șirului de numere naturale ce începe cu 0. În acest scop dispunem de un mod de exprimare mai succint, pe care îl definesc astfel:

Propoziția

„ n este un membru al șirului de numere naturale începînd cu 0“

are aceeași semnificație ca

„ n este un număr finit“.

Atunci putem formula propoziția de mai sus după cum urmează: nici un număr finit nu este propriul său succesor în șirul numerelor naturale²³⁵.

Numere infinite

§ 84. Pe lîngă numerele finite avem numerele infinite²³⁷. Numărul care revine conceptului „număr finit“ este un număr infinit²³⁸. Să-l notăm, de exemplu, prin

* La p. 63, op. cit., E. Schröder pare să considere această propoziție ca o consecință a unui mod de desemnare care poate să difere de cel de față. Aici se manifestă neajunsul care afectează întreaga sa prezentare a chestiunii, și anume că de fapt nu știm dacă numărul este un semn — iar în acest caz, care este semnificația sa — sau dacă numărul este tocmai această semnificație a semnului. Din simplul fapt că instituim semne diferite în așa fel încît nici unul să nu se repete, nu urmează că aceste semne desemnează efectiv lucruri diferite²³⁶.

∞_1 . Dacă ar fi finit, el nu ar putea fi propriul său succesor imediat în şirul numerelor naturale. Or, se poate arăta că pentru ∞_1 tocmai acesta este cazul.

Numărul infinit ∞_1 astfel definit nu conţine nimic misterios sau miraculos. „Numărul care revine conceptului F este ∞_1 “ nu înseamnă acum nimic mai mult sau mai puţin decît: există o relaţie care pune obiectele subsumate conceptului F în corespondenţă biunivocă cu numerele finite. Potrivit definiţiilor noastre, condiţia are un sens pe deplin clar şi neechivoc; aceasta este suficient pentru a justifica utilizarea semnului ∞_1 şi a-i garanta o semnificaţie. Faptul că nu ne putem forma vreo reprezentare despre un număr infinit nu are nici o importanţă; nu altfel se întîmplă şi cu numerele finite. Numărul nostru ∞_1 este astfel tot atît de determinat ca orice număr finit: el este recognoscibil ca atare fără putinţă de dubiu şi poate fi distins de orice alt număr²³⁹.

§ 85. Recent, G. Cantor a introdus într-o lucrare remarcabilă* numere infinite²⁴⁰. Împărtăşesc pe deplin aprecierea pe care el o dă concepţiei care în genere nu acceptă ca avînd realitate decît numerele finite. Nici aceste numere, nici fracţiile, nici numerele negative, iraţionale şi complexe nu pot fi percepute senzorial şi nu au caracter spaţial; iar dacă spunem că actualitate are numai ceea ce acţionează asupra simţurilor sau, cel puţin, comportă efecte ce pot avea drept urmări mai apropiate sau mai îndepărtate percepţii senzoriale, atunci desigur că aceste numere nu au actualitate²⁴¹. Dar teoremele noastre nu pretind nicidecum asemenea percepţii în calitate de temeiuri demonstrative. În investigaţiile noastre putem utiliza fără ezitare un nume sau semn introdus ireproşabil din punct de vedere logic, şi deci numărul nostru este tot atît de justificat ca şi numărul doi sau numărul trei.

* *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre*, Leipzig, 1883.

Cred că în această privință sînt de acord cu Cantor. dar terminologia mea diferă întrucîtva de a lui. Ceea ce eu numesc număr, el numește „putere“, în timp ce conceptul său* de număr se referă la ordonare. În cazul numerelor finite independența față de succesiunea în cadrul șirului este incontestabilă, dar nu același este cazul numerelor transfinite²⁴². Or, folosirea cuvîntului „număr“ și a întrebării „cît de mulți?“ nu trimite la vreo ordine determinată. Numărul lui Cantor răspunde mai curînd întrebării „al citelea membru al succesiunii este membrul ultim?“. Ca urmare, cred că denumirea pe care o folosesc concordă în mai mare măsură cu uzanța lingvistică. Atunci cînd extindem semnificația unui cuvînt, trebuie să avem în vedere ca un număr cît mai mare de propoziții generale să rămînă valabile, și mai cu seamă principii atît de esențiale cum este, în cazul numărului, independența față de poziția în cadrul unui șir. Nu a trebuit să apelăm la o extindere, întrucît conceptul nostru de număr cuprinde din capul locului și numere infinite.

§ 86. Spre a obține numerele sale infinite, Cantor introduce conceptul relației de succesiune în cadrul unei consecuții, concept care diferă de conceptul meu de „succesiune într-un șir“²⁴³. De exemplu, după Cantor, apare o consecuție atunci cînd ordonăm numerele întregi pozitive finite, astfel încît cele impare să se succedă în ordinea lor naturală și tot astfel cele pare, și totodată stipulăm că orice număr par trebuie să urmeze oricărui număr impar. În această consecuție, de exemplu, 0 ar succede lui 13. În schimb, nici un număr nu l-ar precede imediat pe 0. Acesta este doar unul din cazurile ce nu pot surveni în succesiunea în cadrul unui șir definită de mine. Se poate demonstra riguros, fără a apela la vreo axiomă a intuiției, că dacă y este un succesor al lui x în cadrul unui q -șir, există un obiect care îl pre-

* Această expresie ar putea părea să contrazică obiectivitatea conceptului, pe care am evidențiat-o în cele de mai sus; dar în cazul de față, subiectivă este numai denumirea.

cede imediat pe η în cadrul acestui şir. După părerea mea, încă nu avem o definiţie precisă a succesiunii într-o consecuţie şi a numărului cantorian. Cantor se referă la o „intuiţie interioară” misterioasă, acolo unde ar trebui să căutăm o demonstraţie pe bază de definiţii, demonstraţie pe deplin posibilă²⁴⁴. Într-adevăr, eu cred a întrezări modul în care pot fi definite conceptele respective. — În nici un caz, nu vreau ca prin observaţiile făcute să pun în cauză justificarea şi rodnicia acestor concepte. Dimpotrivă, salut în aceste investigaţii o lărgire a hotarelor ştiinţei, şi îndeosebi faptul că ele au deschis un drum pur analitic către numerele (puterile) transfinite de ordin superior²⁴⁵.

V. Încheiere²⁴⁶

§ 87. Sper că în această scriere am reuşit să fac plauzibil²⁴⁷ faptul că legile aritmetice sînt judecaţi analitice şi deci *a priori*. Potrivit acestui punct de vedere, aritmetica ar fi numai o logică mai elaborată, orice propoziţie aritmetică fiind o lege logică, deşi una derivată²⁴⁸. Aplicaţiile aritmeticii în explicarea naturii ar reprezenta prelucrări logice ale unor fapte observate*; a calcula ar însemna a raţiona. Legile numărului nu pretind — aşa cum crede Baumann** — o verificare practică, pentru a fi aplicabile în cadrul lumii exterioare; într-adevăr, în lumea exterioară, a totului spaţial, nu există concepte, proprietăţi ale conceptelor, numere²⁴⁹. Aşadar, legile numărului nu sînt propriu-zis aplicabile la lucrurile exterioare, ele nu sînt legi ale naturii. În schimb, ele sînt pe deplin aplicabile la judecaţi privitoare la lucrurile lumii exterioare: ele sînt legi ale legilor naturii. Ele afirmă nu o conexiune între fenomene naturale, ci o conexiune între judecaţi; or, în rîndul acestora din urmă se află şi legile naturii²⁵⁰.

* Observarea însăşi înglobează deja o anumită activitate logică.

** *Op. cit.*, vol. II, p. 670.

§ 88. Kant* a subapreciat în mod evident valoarea judecăților analitice — și aceasta ca urmare a unei determinări prea înguste a conceptului în cauză, deși se pare că el a întrezărit conceptul mai larg pe care îl utilizăm în cele de față**. Dacă pornim de la definiția lui, împărțirea judecăților în analitice și sintetice nu este exhaustivă. Ceea ce are el în vedere este cazul judecății universale afirmative. Dacă ne referim la aceasta, putem vorbi despre un concept-subiect și ne putem întreba dacă conceptul-predicat este cuprins, potrivit definiției sale, în primul. Ce se întâmplă însă atunci când subiectul este un obiect singular? Sau ce se întâmplă atunci când avem o judecată existențială? În acest caz nici nu mai putem vorbi despre un concept-subiect în sensul de mai sus. Kant pare a înțelege conceptul ca determinat prin notele ce-i revin; acesta este însă cel mai steril mod de constituire a conceptelor. Dacă aruncăm o privire asupra definițiilor introduse mai sus, nu vom găsi nici una de acest gen. Același lucru se poate spune și despre definițiile cu adevărat fecunde din matematică, de exemplu despre definiția continuității unei funcții. Ea nu ne oferă o serie de note asociate, ci o combinaire mai intimă — aș spune, mai organică — a determinărilor. Deosebirea poate fi intuită prin intermediul unei ilustrări geometrice. Dacă reprezentăm conceptele (sau extensiunile acestora) prin regiuni ale unui plan, conceptului definit pe baza notelor asociate îi va corespunde regiunea comună tuturor regiunilor acestor note; conceptul va fi cuprins prin părți ale delimitărilor acestora. În cazul unei asemenea definiții problema constă, așadar, — vorbind la figurat — în a utiliza într-un mod inedit liniile date în prealabil spre a delimita astfel o anumită regiune***. Dar în acest caz nu iese la iveală ceva esențial nou. Definițiile mai fe-

* *Loc. cit.*, III, p. 39 și urm.²⁵¹.

** La p. 43 el afirmă că o propoziție sintetică poate fi privită potrivit principiului contradicției numai atunci când o altă propoziție sintetică este presupusă²⁵².

*** Și la fel atunci când notele sînt legate prin „sau“.

cunde ale conceptelor trasează linii de demarcație care nu au fost date în prealabil. Ceea ce se poate infera pe baza lor nu poate fi întrevăzut cu anticipație; nu ne mărginim să scoatem din sertar ceea ce pusesem acolo în prealabil. Consecințele pe care le tragem lărgesc cunoștințele noastre și, prin urmare, potrivit lui Kant, trebuie considerate ca sintetice; nu mai puțin însă, ele pot fi demonstrate pur logic și ca atare sînt analitice. În fapt, ele sînt cuprinse în definiții, dar așa cum planta se află în sămînță, nu așa cum podul se află într-o casă. Adesea, demonstrația unei propoziții reclamă mai multe definiții și deci propoziția respectivă nu este conținută în vreuna din ele, însă decurge în mod pur logic din toate la un loc²⁵³.

§ 89. Mă văd obligat să contest și valabilitatea universală a afirmației lui Kant* potrivit cu care, fără sensibilitate nici un obiect nu ne poate fi dat²⁵⁴. Zero, unu sînt obiecte care nu pot să ne fie date într-un mod sensibil. Pînă și acei ce consideră că numerele mai mici sînt sensibil intuitive vor trebui să admită că nici un număr mai mare ca $1000^{(1000^{1000})}$ nu le poate fi dat într-un mod intuitiv-sensibil dar că, în pofida acestui fapt, deținem numeroase cunoștințe despre aceste numere. S-ar putea ca termenul „obiect” să fie utilizat de către Kant în vreo altă accepție; dar atunci zero, unu, ca și numărul nostru ∞_1 rămîn inexplicabile; într-adevăr, ele nu sînt concepte și, dealtfel, Kant* pretinde ca pînă și conceptelor să li se atribuie un obiect în cadrul intuiției²⁵⁵.

Spre a nu mi se reproșa că mă dedau la șicane mărunte la adresa unui geniu către care nu putem privi decît cu admirație recunoscătoare, cred că este cazul să relev și acordul de idei, care are o pondere cu mult mai mare. Pentru a mă referi numai la probleme legate strîns de cele de față, consider că un mare merit al lui Kant rezidă în faptul că el a făcut distincția între judecățile sintetice și analitice. Spunînd că adevărurile geometriei sînt sintetice *a priori*, el a dezvăluit esența lor reală.

* *Op. cit.*, III, p. 82.

Acest lucru merită să fie repetat și astăzi, întrucât el continuă adesea să fie ignorat. Deși Kant s-a înșelat în privința aritmeticii, aceasta — după părerea mea — nu știrbește în mod esențial meritele sale. Pentru el, lucrul cel mai important este existența unor judecăți sintetice *a priori*; problema dacă ele survin numai în cadrul geometriei sau survin și înăuntrul aritmeticii are o importanță mai mică²⁵⁶.

§ 90. Nu pretind a fi făcut mai mult decât plauzibilă natura analitică a adevărilor aritmeticii, deoarece încă mai putem avea dubii asupra faptului dacă demonstrarea lor se bazează integral pe legi pur logice sau dacă nu cumva un temei demonstrativ de alt gen intervine undeva într-un mod insesizabil. Nici indicațiile pe care le-am dat în vederea demonstrării unor propoziții nu vor înlătura întru totul această obiecție; ea poate fi depășită numai printr-un lanț de raționamente fără fisuri, în cadrul căruia fiecare pas să decurgă conform unuia dintre puținele procedee de raționare recunoscute a fi pur logice. Așa se face că pînă acum nu a fost dată nici măcar o singură demonstrație; într-adevăr, matematicianul se declară mulțumit atunci cînd fiecare trecere la o judecată nouă este evident corectă, fără să se mai întrebe dacă această evidență este de natură logică sau intuitivă. Or, un asemenea demers se relevă adesea a fi foarte complex, el echivalînd cu mai multe inferențe simple, în care se mai pot strecura unele elemente provenite din intuiție. Procedîndu-se prin salturi se creează astfel aparența unei multitudini nesfîrșite de tipuri de raționament în matematică; într-adevăr, cu cît sînt mai mari, cu atît salturile pot să reprezinte mai multe combinații de raționamente simple și de axiome ale intuiției. Cu toate acestea, o asemenea trecere ne apare a fi nemijlocit evidentă, fără a mai deveni conștienți de treptele intermediare și, întrucît trecerea nu se prezintă sub forma unui procedeu logic de raționare recunoscut, inclinăm să considerăm această evidență ca avînd o natură intuitivă, iar adevărul concluziei

il considerăm drept sintetic, pînă și atunci cînd domeniul de validitate debordează în mod vădit granițele intuiției.

Urmînd această cale, nu este posibil să delimităm în mod net elementul sintetic, întemeiat pe intuiție, de cel analitic. Totodată, procedînd astfel, nu vom reuși să detașăm în mod cert toate axiomele intuiției, astfel încît fiecare demonstrație matematică să se poată efectua, pornind numai de la aceste axiome, conform legilor logicii²⁵⁷.

§ 91. Se ridică, de asemenea, necesitatea imperioasă de a evita orice salturi în procesul inferenței. O asemenea exigență este greu de satisfăcut, întrucît operarea pas cu pas este obositoare. Orice demonstrație ceva mai complicată riscă să capete o lungime enormă. Datorită acestui fapt, varietatea excesivă a formelor logice ce-și găsesc expresia în cadrul limbajului îngreunează delimitarea unui ansamblu de moduri de raționament care în același timp să fie suficient în toate cazurile și transparent.

Pentru a diminua această dificultate, am inventat scrierea mea conceptuală. Scopul ei este de a obține o concizie și o claritate sporită a expresiei și de a opera printr-un număr restrîns de forme precise în maniera unui calcul, astfel încît să permită numai pașii conformi unor reguli stipulate odată pentru totdeauna*. În felul acesta, nici o premisă nu se poate strecura neobservată în cadrul demonstrației. Astfel, fără să împrumut vreo axiomă de la intuiție, am demonstrat o propoziție** care la prima vedere ar putea fi considerată sintetică și pe care o voi formula aici după cum urmează:

Dacă relația fiecărui element al unui șir față de elementul imediat următor este univocă, și dacă m și y succed lui x în cadrul acestui șir, atunci sau y precede lui m în acest șir, sau coincide cu el, sau este succesor al lui m ²⁵⁸.

* Această scriere trebuie să fie în măsură, totuși, să exprime nu numai forma logică — așa cum este cazul cu simbolismul lui Boole —, ci și un conținut.

** *Begriffsschrift*, Halle, 1879, p. 86. Formula 133.

Această demonstrație ne permite să constatăm că propoziții care extind cunoștințele noastre pot conține judecăți analitice*.

Alte numere

§ 92. Până acum ne-am limitat examenul la numerele naturale. Să aruncăm acum o privire și asupra altor genuri de numere, încercînd să aplicăm la acest domeniu mai larg ceea ce am descoperit în cazul domeniului restrîns.

Urmărind să precizeze sensul problemei privind posibilitatea unui număr, Hankel** afirmă: „Numărul nu mai este astăzi un lucru, o substanță care ar exista în afara subiectului cugetător și a obiectelor care îl fac cu puțință, un principiu autonom, cum era, bunăoară, la pitagoricieni. Așadar, problema existenței nu poate fi raportată decît la subiectul gînditor sau la obiectele gîndite, obiecte ale căror relații sînt reprezentate de numere. Strict vorbind, imposibil pentru matematician este numai ceea ce e logic imposibil, adică ceea ce se contrazice cu sine. Nu mai trebuie să demonstrăm că numerele care sînt imposibile în acest sens nu pot fi admise. Atunci însă cînd numerele în cauză sînt posibile din punct de vedere logic, cînd conceptul lor este definit în mod clar și distinct și deci fără contradicție, problema de mai sus nu poate consta decît în a ști dacă în domeniul realului

* Se va considera că această demonstrație este încă mult prea complicată; iată un dezavantaj pe care, desigur, certitudinea practică absolută de a nu se fi strecurat vreo eroare sau omisiune pare a-l compensa cu prisosință. Pe atunci, ceea ce urmăream era a reduce totul la un număr minim de legi logice cît mai simple cu putință. Din acest motiv, am recurs la un singur mod de inferență²⁵⁹. Dar încă de pe atunci am indicat în Prefață (p. VII) că în vederea unei aplicări ulterioare ar fi de dorit să admitem mai multe asemenea moduri. Aceasta o putem face fără a prejudicia coeziunea lanțului de inferențe, ceea ce ne permite să obținem o comprimare considerabilă.

** *Op. cit.*, pp. 6 și 7.

sau al datului intuitiv, al actualului, există un substrat al acestora, dacă există obiecte în care numerele, adică relațiile intelectuale de genul arătat, îmbracă o aparență fenomenală²⁶⁰.

§ 93. Prima propoziție ne face să ne întrebăm dacă, potrivit lui Hankel, numerele există în subiectul cugetător, în obiectele care le ocazionează, sau în ambele. În orice caz, în sens spațial ele nu sînt nici înăuntrul, nici în afara subiectului, sau a unui oarecare obiect. Dar, fără discuție, ele sînt în afara subiectului în sensul că nu sînt subiective. În timp ce oricine nu poate simți decît propria lui durere, propria lui plăcere ori foame, nu poate avea decît propriile sale senzații auditive și vizuale, numerele pot fi obiecte comune pentru mai mulți și anume, ele sînt pentru toți exact aceleași²⁶¹, nu sînt simple stări interioare mai mult sau mai puțin asemănătoare ale unor persoane diferite. Înțelegînd să raporteze problema existenței la subiectul care gîndește, Hankel pare să o transforme astfel într-o problemă psihologică, ceea ce în nici un caz nu este. Matematica nu se interesează de natura psihicului nostru iar răspunsul pe care îl primesc problemele psihologice, oricare ar fi ele, trebuie să-i fie absolut indiferente²⁶².

§ 94. Trebuie să obiectăm, de asemenea, și împotriva ideii că pentru matematician imposibil este numai ceea ce se contrazice cu sine. Un concept este admisibil chiar și în cazul cînd notele sale definitorii cuprind o contradicție; singura condiție este să nu presupunem că sub acest concept cade ceva. Dimpotrivă, faptul că conceptul nu cuprinde vreo contradicție nu ne permite încă să deducem că ceva i se subsumează. Dealtfel, cum s-ar putea demonstra că un concept nu cuprinde vreo contradicție? Demonstrația este departe de a fi întotdeauna evidentă; din faptul că nu întrezărim o contradicție, nu urmează că efectiv nu există nici o contradicție, iar definiția, oricît de clară ar fi, nu oferă garanții în acest sens.

Hankel demonstrează* că un sistem închis de numere complexe mai general decât cel uzual și care ar admite toate legile adunării și înmulțirii conține o contradicție. Acest lucru trebuie într-adevăr demonstrat; el nu este imediat evident. Înainte de a se întâmpla aceasta, cineva ar putea totuși să utilizeze un asemenea sistem de numere spre a ajunge la rezultate uimitoare, a căror justificare nu ar fi mai prejos de aceea pe care o dă Hankel*** pentru teoremele despre determinanți, prin intermediul numerelor alternante; în adevăr, cine ne garantează că nici în conceptul acestora nu este cuprinsă o contradicție ascunsă? Dar, chiar dacă s-ar putea exclude o asemenea contradicție în cazul general, pentru un număr arbitrar de unități alternante, încă nu ar rezulta că asemenea unități există²⁶³. Or, tocmai de aceasta avem nevoie. Să luăm ca exemplu Propoziția 18 din Cartea I a *Elementelor* lui Euclid: În orice triunghi latura cea mai mare se opune unghiului mai mare.

Pentru a demonstra aceasta, Euclid duce pe latura mai mare AC un segment AD egal cu latura mai mică AB și apelează totodată la o construcție anterioară. Demonstrația ar eșua dacă un asemenea punct nu ar exista; nu este suficient să nu se fi detectat vreo contradicție în conceptul „punct pe AC, a cărui distanță față de A este egală cu distanța lui B față de A”. Unim acum B cu D. Faptul că o atare dreaptă există, constituie o altă propoziție pe care se sprijină demonstrația noastră.

§ 95. Non-contradicția unui concept poate fi pusă în evidență în mod riguros numai dacă demonstrăm că acestui concept i se subsumează ceva. Reciproca ar fi o eroare²⁶⁴. Hankel*** o comite atunci când afirmă privitor la ecuația $x + b = c$:

„Este evident că atunci când $b > c$, nu există nici un număr x în șirul 1, 2, 3, ..., care să rezolve problema res-

* *Op. cit.*, pp. 106—107.

** *Op. cit.*, § 35.

*** *Op. cit.*, p. 5. Similar, E. KOSSAK, *op. cit.*, p. 17 jos.

pectivă: scăderea este în acest caz imposibilă. Nimic nu ne împiedică însă în acest caz să privim diferența $(c-b)$ ca pe un semn care oferă problemei o soluție și cu care putem opera exact ca și cum ar fi un semn numeric din șirul 1, 2, 3, ...“.

Și totuși ceva ne împiedică să-l considerăm în mod necondiționat pe $(2-3)$ ca pe un semn care oferă o soluție problemei: într-adevăr, un semn gol nu rezolvă problema; dacă nu are un conținut, semnul nu este decît o pată de cerneală obișnuită sau tipografică pe hîrtie și, ca atare, posedă proprietăți de ordin fizic, dar nu și pe aceea de a da 2, atunci cînd îl adunăm cu 3. Propriu-zis, el nu este un număr iar utilizarea sa în această calitate ar constitui o eroare logică. Chiar și atunci cînd $c > b$, nu semnul $(..c-b)$ este soluția problemei, ci conținutul acestui semn.

§ 96. La fel de bine am putea spune: printre numerele cunoscute pînă acum nu există unul care să satisfacă concomitent ecuațiile

$$x+1=2 \text{ și } x+2=1,$$

însă nimic nu ne împiedică să introducem un semn care soluționează problema. Se va replica: problema conține de data aceasta o contradicție. Incontestabil așa este, dacă cerem ca soluția să fie un număr real sau un număr complex obișnuit; dar de ce nu am extinde sistemul nostru de numere, de ce nu am crea numere care să satisfacă exigențele de mai sus? Vom aștepta pînă cînd cineva ne va indica vreo contradicție! Parcă știe cineva ce posibilități oferă aceste noi numere? Firește, în cazul de mai sus univocitatea scăderii nu va mai putea fi păstrată; dar oare la univocitatea extragerii rădăcinii nu ne vedem obligați să renunțăm, de asemenea, atunci cînd vrem să introducem numerele negative? Iar operarea cu numerele complexe face ca logaritmarea să fie multivocă.

Mergînd mai departe, de ce să nu creăm și numere care permit însumarea șirurilor divergente? Dar nu! Matematicianul poate tot atît de puțin ca și geograful să

creeze ceva în mod arbitrar; nici el nu poate decît să descopere ceea ce este în fapt și să-i dea nume.

Această eroare afectează teoria formală a fracțiilor, a numerelor negative, a numerelor complexe*. Se emite cerința ca regulile de calcul cunoscute să fie păstrate în măsura posibilului pentru numerele ce urmează a fi introduse, iar de aici se deduc proprietăți și relații generale ale acestora. Dacă nu se ajunge nicăieri la vreo contradicție, introducerea noilor numere se consideră justificată, ca și cum nici o contradicție nu se putea strecura pe undeva, sau ca și cum necontradicția ar fi deja existență!²⁶⁵

§ 97. Ușurința cu care se comite această eroare se datorează faptului că nu s-a trasat o distincție satisfăcătoare între concepte și obiecte. Nimic nu ne împiedică să facem uz de conceptul „rădăcina pătrată din -1 ”; dar acest simplu fapt nu ne autoriză să folosim articolul hotărît și să considerăm expresia „rădăcina pătrată din -1 ” ca avînd sens. Dacă admitem că $i^2 = -1$ atunci putem demonstra formula pe baza căreia sinusul unui multiplu al unghiului α se exprimă prin $\sin \alpha$ și $\cos \alpha$; dar nu trebuie să uităm că propoziția respectivă presupune condiția $i^2 = -1$, condiție pe care nu o putem pur și simplu omite. Dacă nu ar exista ceva al cărui pătrat să fie -1 , egalitatea de mai sus nu ar fi neapărat corectă, în virtutea demonstrației noastre**, deoarece condiția $i^2 = -1$, de care este ținută să depindă valabilitatea egalității, nu ar mai fi satisfăcută. Ar fi ca și cum în cursul unei demonstrații geometrice am apela la o linie auxiliară a cărei trasare este imposibilă.

§ 98. Hankel*** introduce două tipuri de operații, numite de el lytică și tetică, definindu-le prin anumite pro-

* La fel se întîmplă cu cardinalii infiniți ai lui Cantor.

** Deși nu este exclus ca ea să poată fi demonstrată riguros pe o altă cale.

*** *Op. cit.*, p. 18.

prietăți pe care aceste operații trebuie să le satisfacă. Aici nu avem nimic de obiectat, atît timp cît nu se presupune existența unor asemenea operații și a unor obiecte ce pot rezulta din ele*. Mai încolo** el notează prin $(a+b)$ o operație tetică univocă, asociativă, iar operația lytică corespunzătoare, de asemenea univocă, o notează prin $(a-b)$. O operație? Care însă anume? Una arbitrară? În acest caz, nu avem nicidecum o definiție pentru $(a+b)$; și ce se întîmplă dacă nici nu există vreo asemenea definiție? Dacă cuvîntul „adunare“ nu ar avea încă vreo semnificație, ar fi permis din punct de vedere logic să spunem: o operație de acest gen o vom numi adunare; dar nu putem spune: o asemenea operație trebuie să se numească *adunarea* și să se noteze prin $(a+b)$, înainte de a fi stabilit că există o asemenea operație și numai una. Nu este permis să utilizăm într-o parte a unei identități definitorii articolul nehotărît, iar în cealaltă parte articolul hotărît. Hankel întrebuițează în continuare expresia „modulul operației“ fără vreo altă precizare, fără să fi arătat că există un modul și numai unul.

§ 99. Pe scurt, această teorie pur formală²⁶⁶ este nesatisfăcătoare. Elementul ei valoros se rezumă la următoarele. Se demonstrează că atunci cînd operațiile se bucură de anumite proprietăți, ca asociativitatea și comutativitatea, anumite propoziții sînt valabile privitor la ele. Arătîndu-se apoi că adunarea și înmulțirea pe care le cunoaștem deja au aceste proprietăți, putem enunța imediat despre ele propozițiile respective fără a mai repeta demonstrația amănunțită în fiecare caz în parte. Abia prin această aplicare la operații date în altă parte ajungem la propozițiile cunoscute ale aritmeticii. În nici un caz nu putem crede însă că această metodă ne-ar permite să introducem adunarea și înmulțirea. Ceea ce se

* Ceea ce în realitate Hankel și face, întrucît aplică identitatea $\Theta(c, b) = a$.

** *Op. cit.*, p. 29.

dă este numai un îndreptar pentru definițiile în cauză, nu înseși aceste definiții. Dacă spunem că denumirea de „adunare“ trebuie conferită numai unei operații tetice univoce și asociative, prin aceasta operația care urmează a se cheama astfel nu a fost încă dată. După aceea, nimic nu ne împiedică să numim înmulțirea adunare și să o notăm prin $(a+b)$, și nimeni n-ar putea să afirme în mod precis dacă $2+3$ fac 5 sau 6.

§ 100. Dacă abandonăm această abordare pur formală, o cale pare a ni se deschide de la sine, grație faptului că semnificația cuvintelor „sumă“ și „produs“ se extinde concomitent cu introducerea unor numere noi. Luând un obiect, — să spunem Luna — vom defini: Luna înmulțită prin ea însăși este -1 . În acest caz, Luna reprezintă pentru noi o rădăcină pătrată din -1 .²⁶⁷ Această stipulare pare a fi permisă, întrucât din semnificația de pînă acum a înmulțirii sensul unui asemenea produs nu reiese de la sine și de aceea el poate fi stabilit în mod arbitrar, prin extinderea acestei semnificații. Dar nouă ne mai trebuie și produsul unui număr real prin rădăcina pătrată din -1 . În consecință, vom alege intervalul de o secundă în calitate de rădăcină pătrată din -1 și îl vom nota prin i . Vom înțelege atunci prin $3i$ intervalul de 3 secunde ș.a.m.d.*. Ce obiect îl vom simboliza atunci, să spunem, prin $2+3i$? Ce semnificație ar urma să fie atribuită în acest caz semnelui plus? Ea trebuie stabilită însă în cazul general, ceea ce, desigur, nu va fi ușor de realizat. Dar să admitem deocamdată că am atașat un sens tuturor semnelor de forma $a+bi$, și anume un sens pentru care

* Cu același drept am putea alege și un anumit quantum de electricitate, o anumită suprafață ș.a.m.d. în calitate de rădăcină pătrată din -1 , aceste rădăcini diferite urmînd, bineînțeles, să fie notate în mod diferit. Faptul că, după toate aparențele, putem crea astfel un număr arbitrar de rădăcini pătrate din -1 va fi mai puțin surprinzător dacă ne gîndim că semnificația rădăcinii pătrate nu a fost stabilită în mod invariabil înaintea acestor stipulări, ci abia prin intermediul lor²⁶⁸.

legile cunoscute ale adunării rămîn valabile. Atunci ar urma să stipulăm, în continuare, că în general avem

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + i(ad + bc),$$

definind astfel înmulțirea extinsă.

§ 101. Acum, dacă am ști că din egalitatea numerelor complexe decurge egalitatea părților reale, am putea demonstra formula pentru $\cos(n\alpha)$. Aceasta ar trebui să rezulte din sensul lui $a+bi$, pe care aici l-am luat ca dat din capul locului. Demonstrația ar fi valabilă numai pentru acel sens al numerelor complexe, al sumelor și produselor lor, pe care l-am stipulat deja. Întrucît însă, pentru realul întreg n și realul α , i nu mai apare în cuprinsul ecuației, am putea fi tentați să conchidem: așadar, este absolut indiferent ce anume înseamnă i — o secundă, un milimetru sau orice altceva — atîta timp cît legile noastre pentru adunare și înmulțire sînt valabile, totul depinde numai de acestea; în rest, nu trebuie să ne pese de nimic. Poate că, într-adevăr, putem stabili semnificația lui $a+bi$, a sumei și produsului, în variate moduri, astfel încît propozițiile respective să rămînă valabile; nu este însă indiferent dacă în genere putem găsi un asemenea sens pentru aceste expresii.

§ 102. De multe ori se procedează ca și cum simpla emitere a unei cerințe ar constitui deja propria ei satisfacere. Postulîndu-se că scăderea*, împărțirea, extragerea rădăcinii pot fi efectuate în toate cazurile, se consideră apoi că aceasta este suficient. De ce nu cerem atunci ca și prin trei puncte oarecari să se poată duce întotdeauna o dreaptă? De ce nu cerem ca totalitatea legilor adunării și înmulțirii să fie valabile pentru un sistem tridimensional de numere complexe ca și pentru unul real? Pentru că acest postulat cuprinde o contradicție. Dar dacă este așa, trebuie mai întîi să se demonstreze că și celelalte postulate nu conțin vreo contradicție! Atîta timp cît acest

* Compară KOSSAK, *op. cit.*, p. 17.

deziderat nu a fost împlinit, rigoarea mult rîvnită rămîne un pur miraj²⁶⁹.

Într-o teoremă geometrică, liniile auxiliare la care s-a recurs cumva în cadrul demonstrației nu mai apar. Eventual sînt posibile mai multe asemenea construcții auxiliare, de exemplu atunci cînd putem alege un punct în mod arbitrar. Dar, oricît de superfluă ar fi orice linie în parte, forța demonstrației depinde totuși de posibilitatea trasării unei linii cu proprietatea dorită. Simpla postulare nu este suficientă. Tot astfel și în cazul nostru, pentru ca demonstrația să fie convingătoare nu este indiferent dacă „ $a+bi$ ” are un sens sau nu e decît cerneală tipografică. Pentru aceasta nu este de ajuns să cerem ca să aibă un sens, sau să afirmăm că sensul ar fi suma lui a și bi , dacă în prealabil nu am definit ce înseamnă în cazul de față „sumă” și dacă nu am justificat utilizarea articolului hotărît.

§ 103. Împotriva propunerii noastre de stabilire a sensului lui „ i ” se pot aduce, desigur, numeroase obiecții. Pe această cale, noi introducem un element cu totul eterogen, timpul, înăuntrul aritmeticii. Secunda nu stă în vreun raport intim cu numerele reale. Propozițiile demonstrate prin intermediul numerelor complexe ar deveni judecări *a posteriori* sau sintetice dacă nu ar exista un alt gen de demonstrație, sau dacă nu am putea găsi vreun alt sens pentru i . În orice caz, ar trebui să încercăm mai întîi să demonstrăm că toate propozițiile aritmeticii sînt analitice.

Cînd Kossak* afirmă privitor la numărul complex: „El este reprezentarea compusă a unor grupuri eterogene de elemente identice”**, s-ar părea că el a reușit astfel să evite introducerea unui lucru străin; dar această aparență se datorează numai impreciziei modului său de expri-

* *Op. cit.*, p. 17.

** A se compara privitor la expresia „reprezentare”, § 27, privitor la „grup” cele spuse despre „agregat” la §§ 23 și 25, iar privitor la identitatea elementelor §§ 34—39.

mare. Nu ni se explică deloc ce înseamnă propriu-zis $1+i$: este reprezentarea unui măr și a unei pere, sau a durerii de dinți și podagrei? În orice caz, nu poate să însemne concomitent amîndouă, întrucît $1+i$ nu ar fi atunci întotdeauna identic cu $1+i$. Se va spune: semnificația sa depinde de stipularea specială respectivă. Dar dacă este așa, nici propoziția lui Kossak nu ne oferă vreo definiție a numărului complex, ci numai un îndreptar general în acest scop. Ni se cere însă mai mult; trebuie să știm precis ce semnifică „ i ”, iar în cazul cînd, conform îndreptarului de mai sus, am spune că semnifică reprezentarea unei pere — am introduce din nou ceva străin înăuntrul aritmeticii.

În comparație cu propunerile examinate pînă acum, ceea ce se numește de obicei reprezentare geometrică a numerelor complexe²⁷⁰ are cel puțin avantajul că 1 și i nu par a fi complet disparate și eterogene; segmentul considerat ca reprezentant al lui i se află într-o relație strictă cu segmentul care îl reprezintă pe 1 . Dealtfel, riguros vorbind, nu este corect că aici 1 semnifică un anumit segment, iar i un segment perpendicular pe acesta și de lungime egală; din contra, „ 1 ” semnifică peste tot același lucru. Un număr complex indică aici modul în care segmentul care îl reprezintă provine dintr-un segment dat (segmentul unitate), prin multiplicare, diviziune și rotație*. Dar, ca și în cazul propunerilor anterioare, orice teoremă a cărei demonstrație se bazează pe existența unui număr complex apare a fi dependentă de intuiția geometrică și deci sintetică.

§ 104. Cum vom introduce, în acest caz, fracțiile, numerele iraționale și cele complexe? Dacă apelăm la ajutorul intuiției, introducem un element străin înăuntrul aritmeticii; dacă însă definim numai conceptul unui asemenea număr prin notele sale, dacă nu pretindem decît ca numărul să satisfacă anumite proprietăți, nimic încă

* Pentru simplitate, fac aici abstracție de incommensurabile.

nu ne garantează că acestui concept i se va subsuma ceva ce satisface exigențele noastre; or, demonstrațiile noastre trebuie să se sprijine tocmai pe acest fapt²⁷¹.

Cum stau însă lucrurile în cazul numărului [natural]? Să fie adevărat că nu avem dreptul să vorbim despre $1000(1000^{1000})$ înainte ca intuiției să-i fie date tot atâtea obiecte? Până atunci, acesta rămîne un semn gol? — Nici-decum, el are un sens absolut determinat, deși, din punct de vedere psihologic, este imposibil, chiar dacă ținem seamă numai de scurtimea vieții noastre, să aducem în fața conștiinței atâtea obiecte*; dar, în pofida acestui fapt, $1000(1000^{1000})$ este un obiect ale cărui proprietăți le putem cunoaște, deși el nu este intuibil²⁷². Pentru a ne convinge, ajungem să arătăm, atunci cînd introducem semnul a^n pentru ridicarea la putere, că dacă a și n sînt numere întregi pozitive, semnul de mai sus exprimă întotdeauna un număr întreg pozitiv și numai unul. Explicația detaliată a felului cum aceasta este cu putință ne-ar abate prea mult de la ținta noastră. În linii mari, calea urmată este indicată de modul în care am explicat în § 74 numărul zero, în § 77 numărul unu și în § 84 numărul cardinal infinit ∞_1 , precum și de schița demonstrației că orice număr finit din șirul numerelor naturale are ca succesor imediat un număr (§§ 82 și 83).

În ultimă instanță, definiția fracțiilor, a numerelor complexe ș.a.m.d. va reveni și ea integral la descoperirea unui conținut judicabil care poate fi transformat într-o identitate ai cărei membri vor fi tocmai aceste numere noi. Altfel spus: trebuie să stipulăm sensul unei judecăți de recunoaștere pentru asemenea numere. Cu acest prilej trebuie să avem în vedere dubiile suscitade de o atare transformare, pe care le-am discutat (§§ 63—68). Dacă procedăm la fel ca acolo, noile numere ne vor fi date ca extensiuni de concepte.

* Este ușor de văzut că o durată de milioane de ani nu ar fi de ajuns pentru aceasta.

§ 105. Pe baza acestui mod de a concepe numerele* se explică ușor, după părerea mea, farmecul pe care îl exercită studiul aritmeticii și analizei. Parafrazănd o afirmație binecunoscută, am putea spune: obiectul propriu al rațiunii este rațiunea²⁷⁴. În cadrul aritmeticii, noi nu avem de-a face cu obiecte pe care le cunoaștem ca pe ceva străin, exterior, prin intermediul simțurilor, ci cu obiecte date în mod nemijlocit rațiunii, care le poate intui deplin pe acestea ca pe ceva propriu, al ei**.

În pofida faptului de mai sus, ori, mai bine zis, tocmai datorită lui, aceste obiecte nu sînt fantasmе subiective. Nu există nimic mai obiectiv decît legile aritmeticii.

§ 106. Să aruncăm încă o dată o scurtă privire retrospectivă asupra mersului pe care l-am urmat în cercetarea noastră! După ce am stabilit că numărul nu este un conglomerat de lucruri sau o proprietate a unui asemenea conglomerat, dar, pe de altă parte, nu este nici produsul subiectiv al unor fenomene psihice, ci, dimpotrivă, că determinarea numerică a unui concept enunță ceva obiectiv, ne-am străduit, în continuare, să definim fiecare dintre numerele 0, 1 ș.a.m.d. în parte, precum și trecerea de la un număr la altul în cadrul șirului numerelor. O primă tentativă a eșuat, întrucît noi eram în măsură să definim numai acele aserțiuni despre concepte în care 0, 1 intervin în calitate de părți componente, dar nu eram în măsură să definim înseși aceste numere în mod separat. Drept urmare, nu am putut demonstra identitatea numerelor. A reieșit că numărul pe care îl studiază aritmetica nu poate fi conceput ca un atribut neautonom,

* Mod pe care l-am putea numi de asemenea formal, dar care este absolut distinct de cel pe care l-am examinat mai sus sub această denumire²⁷³.

** Prin aceasta nu vreau să contest cituși de puțin că, în absența impresiilor senzoriale, am fi opaci ca un lemn și că nu am putea avea cunoștință despre numere sau despre orice altceva; dar în cadrul de față, acest principiu psihologic nu ne privește cituși de puțin. Doresc să subliniez încă o dată primejdia permanentă de a confunda două chestiuni radical deosebite.

ci trebuie conceput în mod substantival*. Numărul ne-a apărut, prin urmare, ca obiect recognoscibil, deși nu ca obiect fizic sau măcar spațial, și totodată nu ca un obiect despre care ne-am putea forma o reprezentare cu ajutorul imaginației. Am emis apoi principiul că semnificația unui cuvânt nu poate fi elucidată în mod izolat, ci numai în contextul unei propoziții, încredințat fiind că numai prin respectarea acestui principiu putem evita înțelegerea fizicistă a numărului, fără a cădea în cea psihologică. Or, există tocmai un gen de propoziții care trebuie să aibă un sens pentru fiecare obiect: propozițiile de recunoaștere, care, în cazul numerelor, poartă denumirea de egalități. Am văzut că și determinarea numerică poate fi concepută ca o egalitate. Ca atare, se cerea să stabilim sensul unei egalități numerice, să-l exprimăm fără a face uz de numerale sau de cuvântul „număr“. Am descoperit că o judecată de recunoaștere privitoare la numere are drept conținut posibilitatea ca obiectele care cad sub un concept F să fie puse în corespondență biunivocă cu obiectele care cad sub un concept G. Definiția noastră trebuia, deci, să echivaleze posibilitatea menționată cu o egalitate numerică. Am amintit unele cazuri de același gen: definiția direcției pe baza paralelismului, definiția formei pe baza asemănării ș.a.m.d.

§ 107. S-a pus atunci întrebarea: în ce condiții avem dreptul să concepem un conținut ca aparținând unei judecăți de recunoaștere? Pentru aceasta, se cere să fie satisfăcută condiția ca, în cadrul fiecărei judecăți, partea stângă a egalității asumate cu titlu de probă să poată fi înlocuită prin cea dreaptă, fără a se afecta prin aceasta adevărul judecății. Or, dacă nu punem în joc alte definiții despre partea stângă sau dreaptă a unei egalități, nu cunoaștem un alt enunț decât tocmai cel al identității²⁷⁶. Așadar, era suficient să se pună în evidență posibilitatea substituției în cadrul unei egalități.

* Această distincție corespunde celei dintre „albastru“ și „culoarea cerului“²⁷⁵.

Dar un dubiu continua să subziste. O propoziție de recunoaștere, într-adevăr, trebuie să aibă întotdeauna un sens. Or, dacă posibilitatea punerii în corespondență biunivocă a obiectelor de sub conceptul F cu obiectele de sub conceptul G o înțelegem ca pe o identitate și dacă, în consecință, spunem: „Numărul ce revine conceptului F este identic cu numărul ce revine conceptului G “, introducând astfel expresia „Numărul ce revine conceptului F “, egalitatea va avea pentru noi un sens numai atunci când ambele ei părți vor avea forma stipulată mai sus. Potrivit unei atare definiții, nu am putea stabili dacă o egalitate este adevărată sau falsă în cazul când numai una din părțile ei are această formă. Am ajuns astfel la următoarea definiție:

Numărul care revine conceptului F este extensiunea conceptului „concept echinumeric cu conceptul F “. Înțelegându-se că un concept F este echinumeric cu un concept G atunci când există posibilitatea unei corespondențe biunivoce.

Aici noi am presupus că sensul expresiei „extensiune a conceptului“ este cunoscut în prealabil. Desigur, acest mod de a depăși dificultatea nu va fi acceptat în mod unanim; unii vor prefera să risipească acel dubiu într-un mod diferit. Eu însumi nu atribui acestui apel la extensiunea conceptului o importanță decisivă²⁷⁷.

§ 108. Acum ne mai rămâne să explicăm corespondența biunivocă; pe aceasta noi am redus-o la relații pur logice. După ce am schițat în linii mari demonstrația propoziției: Numărul unui concept F este egal cu numărul conceptului G atunci când conceptul F este echinumeric cu conceptul G , am definit numărul 0, expresia „ n este succesorul imediat al lui m în șirul numerelor naturale“ și numărul 1, după care am arătat că 1 este succesorul imediat al lui 0 în șirul numerelor naturale. Am enunțat câteva teoreme care în acest stadiu se pot demonstra cu ușurință și apoi ne-am oprit ceva mai mult asupra următoarei propoziții care ne arată că șirul numerelor este

infiniit: În şirul numerelor naturale orice număr admite un succesor.

Am fost conduşi astfel la conceptul „membru al şirului numerelor naturale terminat cu n “, concept despre care am urmărit să arătăm că numărul său este succesorul imediat al lui n în şirul numerelor naturale. L-am definit mai întâi prin intermediul succesiunii unui obiect y după un obiect x în cadrul unui φ -şir general. Sensul acestei expresii a fost redus, la rîndul său, la relaţii pur logice. În felul acesta am reuşit să arătăm că raţionamentul care procedează de la n la $(n+1)$ şi este considerat îndeobşte a fi specific matematic, se întemeiază pe formele universale ale raţionamentului logic.

Pentru a demonstra infinitatea şirului numerelor trebuie să apelăm acum la propoziţia că nici un număr finit din şirul numerelor naturale nu este propriul său succesor. Am ajuns astfel la conceptul de număr finit şi la conceptul de număr infiniit. Am arătat că în principiu acesta din urmă este tot atît de întemeiat din punct de vedere logic ca şi primul concept. Cu titlu de comparaţie ne-am referit la numerele cardinale infinite ale lui Cantor şi la „succesiunea în cadrul unei consecuţii“ a acestuia. scoţînd în evidenţă, cu acest prilej, deosebirea de formulare.

§ 109. Pe baza celor de mai sus a rezultat astfel cu o mare probabilitate natura analitică şi apriorică a adevărurilor aritmetice; am ajuns totodată la o reformă a concepţiei lui Kant. Mai departe, am văzut ceea ce mai lipseşte pentru a ridica această probabilitate la rangul de certitudine şi am indicat drumul care trebuie să conducă într-acolo.

În sfîrşit, am folosit rezultatele noastre în critica unei teorii formale a numerelor negative, raţionale, iraţionale şi complexe, critică ce a pus în evidenţă inadecvarea acesteia. Eroarea ei rezidă, cum am văzut, în faptul că ea asuma necontradicţia unui concept atunci cînd nici o contradicţie nu s-a manifestat, iar necontradicţia unui concept era considerată ca o garanţie suficientă a realiza-

bilității acestuia²⁷⁸. Această teorie își imaginează că este suficient să erijeze anumite postulate; satisfacerea acestora s-ar subînțelege atunci de la sine. Ea se comportă ca un zeu căruia Cuvîntul îi ajunge ca să poată crea tot ce vrea. Trebuie să criticăm, totodată, identificarea unei directive în vederea unei definiții cu însăși definiția, directivă a cărei respectare ar introduce un element străin înăuntrul aritmeticii, deși ea însăși în formularea sa evită aceasta, dar numai întrucît rămîne o simplă directivă.

Teoria formală la care ne referim ajunge astfel în primejdia de a recădea în aposterioric sau cel puțin în sintetic, în pofida pretențiilor sale de a accede la o culme a abstracțiunii.

Analiza noastră anterioară a numerelor întregi pozitive ne-a arătat însă posibilitatea de a evita această amalgamare a lucrurilor externe cu intuițiile geometrice, fără să cădem totuși în greșelile acelei teorii formale. Ca și acolo, problema rezidă în stabilirea conținutului unei judecăți de recogniție. Dacă considerăm că acest deziderat a fost îndeplinit integral, numerele negative, fracționare, iraționale și complexe nu apar cu nimic mai misterioase decît numerele întregi pozitive, iar acestea din urmă nu apar ca avînd mai multă realitate ori existență, sau ca fiind mai inteligibile decît cele dintîi²⁷⁹.

¹ Titlul cărții este: *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl* (Breslau, W. Koebner, 1884). O nouă ediție a apărut abia în 1934, la Breslau, iar în 1961 la Georg Olms Verlag, Hildesheim (copie fotomecanică a ediției din 1934).

² *Cuprinsul* cărții constituie un adevărat compendiu, la care se recomandă cititorului să revină în repetate rînduri, în cursul și după consumarea lecturii acestui opus fregean. Desăvîrșita claritate, organizarea logică minuțioasă, dorința autorului de a se face înțeles în același timp de către matematicieni, logicieni și filosofi au prezidat redactarea *Cuprinsului*; într-o oarecare măsură, efortul lui Frege de a prezenta lucrurile într-o formă cît mai accesibilă a fost dictat de neînțelegerea cu care fusese primită, înainte cu cîțiva ani *Scrierea conceptuală*. Cu toate acestea, nici *Fundamentele aritmeticii* nu au fost receptate, la apariție, de un public mai larg, iar primirea făcută de către un matematician de prima mîna ca Georg Cantor sau de tînărul filosof Edmund Husserl dovedește că, la apariție, sensul inovator al cărții nu a fost receptat nici măcar de autorități în materie.

³ Distanța dintre număr pe de o parte și semn, cifră, numeral pe de altă parte este conținută implicit; Frege va reveni permanent la acest principiu diriguitor al concepției sale filosofice.

⁴ Asupra statutului logic al variabilelor a se vedea, de asemenea, explicațiile lui Frege în „Funcție și concept” și „Ce este o funcție?”; cf. îndeosebi pp. 252—253 și 320—323 în volumul de față.

⁵ Acest pasaj cu care se deschide *Introducerea* este dătător de seamă asupra densității, fluenței și clarității prin care se distinge maniera fregeană de expoziție. În mai puțin de două pagini, filosoful german formulează explicit sau face să transpară o seamă de teze fundamentale ale filosofiei logicii: (i) distincția

dintre semn și semnificat; (ii) o propoziție este ținută să semnifice un același conținut pentru mai mulți; (iii) variabilele sînt utilizate pentru a exprima generalitatea propozițiilor; (iv) numărul este un obiect determinat cu proprietăți specificabile; (v) o variabilă nu semnifică un obiect anumit.

⁶ Întorsătură tipic socratică a frazei, în consonanță cu reamintirea (în aliniatul următor) a faptului că precondiția învățării este socraticul „știu că nu știu”.

⁷ Johann Friedrich Herbart (1776—1841), filosof, psiholog și pedagog german, a creat sub influența idealismului leibnizian și kantian un sistem metafizic, în care privește realitatea ultimă ca absolut unitară, inuabilă și guvernată de legea necontradicției. Lui Herbart îi aparține, printre altele, încercarea de a crea o psihologic matematică.

⁸ Caracterizarea calculului ca gîndire agregativă, mecanică este tipică pentru orientarea posthegeliană, printre ai cărei reprezentanți se număra și Kuno Fischer. Respingînd această opinie pe care o împărtășeau, dealtfel, și filosofi aflați la antipodul hegelianismului (de la Hobbes la J. Stuart Mill), Frege pune în joc universalitatea legilor gîndirii. Deși în acest context vorbește despre *legi ale gîndirii*, Frege va preciza în alte scrieri că obiectul logicii nu este nicidecum gîndirea și legile ei; logica vizează legile *gîndului* însuși, gînd care este conținut posibil al gîndirii, însă rămîne totodată obiectiv, independent de gîndire.

⁹ Pentru Frege nu există o logică a raționamentului matematic, deosebită de logica generală.

¹⁰ Se are în vedere înțelegerea numărului întreg ca agregat de unități indistincte.

¹¹ Trebuie avut în vedere sensul special pe care cuvintele „concept” și „obiect” îl capătă la Frege. Fiecare număr în parte este un *obiect*, dar toate numerele individuale cad sub *conceptul* numărului. Asupra acestei distincții logicianul german va reveni în repetate rînduri.

¹² Fundarea aritmeticii fiind înțeleasă de Frege în accepția ei mai restrînsă, pur logică, de reconstrucție rațională a conținutului

ei conceptual, intruziunea psihologicului pe tărîmul matematicii este condamnată fără drept de apel. Desigur că altfel se pune chestiunea atunci cînd avem în vedere studiul epistemologic al relațiilor dintre gîndirea matematică și gîndul exprimat în propoziția matematică. În elucidarea întrebării: cum ajunge gîndirea să dobîndească conceptul numărului? discipline ca psihologia și epistemologia genetică pot aduce o contribuție semnificativă. Pe un plan superior, psihologia creației matematice și modelarea acesteia nu sînt cu totul irelevante pentru epistemologia matematicii însăși. Dealtfel, epurarea logicii și a matematicii de orice element antropologic este chestionabilă. Reacția lui Frege împotriva exceselor psihologice ale vremii sale rămîne totuși explicabilă iar străduința sa de a delimita planurile logicii și psihologiei este validabilă în absolut.

¹³ Reacția împotriva materialismului istorico-naturalist, persiflarea evoluționismului vulgar cu neprielnice răsfrîngerî în logica psihologistă a vremii nu-l conduce pe Frege în preajma vreunui proiect hegelian sau, să spunem, hipostaziant-platonic. Este afirmată, pur și simplu, obiectivitatea adevărului matematic, independența lui față de conștiința umană și de substratul material — oricare ar fi acela — al conștiinței. Pe de altă parte, geneza și istoricul conceptelor matematice este, potrivit lui Frege, irelevantă pentru analiza logică a conținutului lor. În ultima chestiune a se vedea și numeroase alte pasaje ale lucrării de față, precum și nota 16.

¹⁴ Ernst Schröder (1841—1902), matematician german, a fost ultimul reprezentant proeminent al perioadei inițiale din dezvoltarea logicii matematice, adică perioada algebrei logicii. Ernst Schröder a perfecționat și sistematizat algebra booleană a claselor, precum și algebra relațiilor elaborată de Peirce. Printre lucrările sale, în afară de acel manual de aritmetică și algebră la care se referă Frege, se numără: *Der Operationskreis des Logikkalküls* (Leipzig, 1877) și *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (3 volume, Leipzig, 1890—1905). Schröder era logicist, considera că matematica nu este decît logică dezvoltată pe baza algebrei relațiilor sau a ceea ce am numi astăzi calcul funcțional de ordinul 1. El a anticipat și teoria tipurilor. Schröder nu a

înțeles valoarea operei fundamentale a lui Frege, *Begriffsschrift* (1879), iar recenzia sa nefavorabilă a pecetluit, din cauza autorității științifice considerabile de care se bucura semnatarul ei, destinul unei cărți care a trecut aproape neobservată la apariție. Izolarea lui Frege se datorează în mare măsură incapacității lui Schröder de a înțelege noua paradigmă a logicii, neîncadrabilă în canoanele algebrei booleene.

¹⁵ Nedetectarea *de facto* trebuie deosebită de imposibilitatea principială a ivirii unei contradicții. Totuși, așa cum va preciza în lucrări ulterioare, Frege nu crede că demonstrația de necontradicție întemeiază în măsură suficientă definițiile, întrucât demonstrația rămâne oricum exterioară conținutului conceptual angajat de aceste definiții. Logicismul fregean se opune din principiu punctului de vedere formalist. Logica este știința adevărului, nu a coerenței.

¹⁶ Pentru Frege, logica reprezintă prin excelență o investigație a obiectivului, în timp ce psihologia poartă asupra subiectivului. Acestei distincții îi corespunde distincția dintre concept și obiect, pe de o parte, reprezentare pe de alta. În ansamblul lucrării de față, importanța acestui principiu director este dezvoltată îndeosebi în §§ 26, 27, 58—61. Fiecare număr individual este un obiect; faptul că nu ni-l putem reprezenta ca atare nu știrbește cu nimic obiectualitatea lui; un obiect nereprezentabil nu încetează prin acest simplu fapt să fie un obiect. Obiect fiind, numărul nu este un lucru, adică ceva subzistent în spațiu și timp, dar el nu este nici o creație a conștiinței. La fel, nu este creație a conștiinței nici conceptul, întrucât el are în egală măsură un caracter obiectiv (cf., de exemplu, §§ 47, 48); însă conceptele sau obiecte abstracte cum sînt numerele, nu au propriu-zis realitate, adică subzistență autonomă, în genul lucrurilor concret-senzoriale.

¹⁷ Acest al doilea principiu director a atras cel mai mult atenția exegeților *Fundamentelor aritmeticii*, din mai multe motive.

În primul rînd, deși Frege îi acordă în cuprinsul cărții de față o importanță deosebită (revenind asupra lui în §§ 60, 62, 106), el nu-l mai formulează explicit în lucrările lui de mai târziu, ceea ce l-a împins pe mai mulți cercetători proeminenți — printre care, de pildă, se numără Michael Dummett — să presupună că

Frege ar fi abandonat principiul contextualității, ca incompatibil cu principiile semanticii sale; semantica fregeană prezentată în „Despre sens și semnificație” — afirmă de asemenea Dummett — pornește de la presupuziția că semnificația și sensul numelor proprii sînt date, sensul propoziției rezultînd din și depinzînd de înțelesurile părților componente.

Un al doilea motiv rezidă în utilizarea particulară atît de importantă dată de Frege, în cadrul demersului îndreptat spre obținerea unui răspuns clar la întrebările privind numărul în general și definirea fiecărui număr în parte.

În sfîrșit, acest principiu al *contextualității înțelesului* este epocal prin conținutul lui; independent de exegeza operei fregeene, ei a impregnat filosofia contemporană a limbajului, sau s-a dovedit în consonanță cu ea, constituindu-se într-un adevărat topos al gîndirii veacului XX.

Din toate aceste motive, o analiză minuțioasă a principiului se impune. Ne vom limita la cîteva, esențiale, precizări.

a) Formularea literală a principiului este: „nach der Bedeutung der Wörter muss im Satzzusammenhange, nicht in ihrer Vereinzelung gefragt werden”. Cuvîntul *Bedeutung* nu are nici accepția tehnică pe care trasarea distincției *Sinn-Bedeutung* i-o va acorda ulterior (a se vedea „Despre sens și semnificație”), ci vizează în mod nediferențiat *conținutul* sau *înțelesul* cuvintelor.

b) Dependența înțelesului cuvintelor de contextul propozițional se manifestă, de bună seamă, în variația înțelesului în funcție de contextele propoziționale diferite în care cuvintele sînt inserate. Totuși nu o asemenea interpretare a principiului contextualității avea în vedere Frege; nu variația înțelesului cuvintelor îl preocupă aici, nu această trăsătură accidentală a limbii obișnuite pe care limbajul științific este ținut s-o recuze; el vroia să spună, după toate probabilitățile, că înțelesul unor cuvinte izolate trebuie degajat din analiza unor propoziții al căror înțeles s-a dezvăluit deja într-o etapă anterioară.

c) Ceea ce afirmă Frege se poate interpreta (i) fie ca afirmare categorică a faptului că cuvintele își capătă înțelesul în propoziție, înțelesul cuvintelor nesubzistînd ca atare în afara contextului propozițiilor, așa cum nici utilizarea lor nu are loc decît în și prin propoziții (ii), fie numai ca sugestie că acest înțeles nu

trebuie căutat ori chestionat în afara unui asemenea context. Ca atare se conturează două interpretări. *Prima* interpretare, mai tără, pare a se găsi, într-adevăr, într-o oarecare tensiune cu principiul după care semnificația unui întreg propozițional este dependentă de semnificația părților sale componente iar sensul propoziției este dependent de sensul părților componente. Acest din urmă principiu este consecința principiului fregean al intersubstituibilității, conform căruia înlocuirea unei părți a propoziției printr-o expresie avînd aceeași semnificație, respectiv același sens, nu modifică semnificația propoziției, respectiv nu modifică sensul acesteia.

A doua interpretare nu pare a contrazice semantica Frege-Church cu al ei principiu al dependenței funcționale a sensului și semnificației întregului propozițional față de sensul și semnificația cuvintelor. Ni se cere să căutăm înțelesul cuvintelor în contextul propozițional, nu ni se interzice însă a izola acest înțeles, localizîndu-l, de exemplu, în *definiens*-ul unei definiții.

d) Dacă ne întrebăm acum asupra utilizării pe care Frege o conferă principiului contextualității, această a doua interpretare, care are de partea ei și evidența textuală, se verifică prin faptul că înțelesurile cuvintelor aritmetice: *zero*, *unu*, *doi*, ..., *număr* sînt definite și, ca atare, izolate; dar ele au fost desprinse tocmai din contextul propozițional, și anume — cum vom vedea — analizîndu-se înțelesul aserțiunilor numerice, *Zahlangabe*, pentru a se preciza că aserțiunea numerică enunță ceva despre un concept, iar apoi analizîndu-se înțelesul anumitor propoziții de identitate. Analiza semnificației întregului propozițional devine o precondiție pentru degajarea semnificației expresiilor numerice, ceea ce validează principiul contextualității. Asupra mecanismului de abstragere a semnificațiilor cuvintelor care desemnează numere Frege se rostește clar: „Spre a obține conceptul de număr trebuie stabilit sensul unei identități numerice“ (p. 109).

e) Corolarul operațional al principiului contextualității îl constituie ceea ce s-au numit mai tîrziu definiții contextuale (a se vedea partea IV a *Fundamentelor aritmeticii*). Motivația logico-filosofică este reliefată clar de către Frege în aliniatul imediat următor, atunci cînd evidențiază solidaritatea primelor două prin-

cipii. Al doilea decurge ca un corolar din primul. Într-adevăr, dacă înțelesul cuvintelor nu trebuie căutat în reprezentările asociate, care sînt numai subiective, difuze, și dacă indicarea unor entități concret-senzoriale este, în cazul unor obiecte abstracte ca numerele, impracticabilă, înțelesul unor cuvinte rămîne a fi stabilit prin analiza contextelor propoziționale în care aceste cuvinte își fac apariția.

f) Totodată, este evident că utilizăm nu cuvinte izolate, ci fraze întregi; cuvintele nu survin izolate, ci în cadrul unor structuri propoziționale. Această observație de bun-simț este potențată în cîmpul de forțe al unei concepții filosofice globaliste, holiste a cărei înriurire s-a făcut simțită în Germania secolului XIX, ajungînd pînă la Frege. Hans D. Sluga vorbește despre o *concepție holistă a semnificației* la Frege, adversă epistemologiei atomiste corelată, aceasta din urmă, cu o înțelegere agregativă a judecăților; opoziția lui Frege față de atomism ar deriva „nemijlocit din atacul lui Kant la adresa empirismului și a atomismului asociat” (HANS D. SLUGA, „Frege and the Rise of Analytic Philosophy”, „Inquiry”, 18, pp. 471—498, vezi în special pp. 479, 480—485). În opoziție cu Dummett, Hans Sluga conchide: „Principiul contextual nu a fost o simplă idee scripitoare pe care Frege a lăsat-o ulterior de o parte. El era expresia unei viziuni filosofice fundamentale care aparține tradiției antiatomiste caracteristică pentru filosofia clasică germană. În al doilea rînd, textele demonstrează explicit că Frege a reafirmat principiul său după 1891 și cred că pînă și trăsăturile aparent recalitrante ale concepției semantice fregeene de mai tîrziu nu pot fi clarificate decît în lumina acestui principiu” (*op. cit.*, p. 485).

Primatul judecății asupra conceptului, primatul gîndului complet asupra părților sale se află în consonanță cu principiul contextualității; a se vedea, pentru edificare, articolul lui Frege, „Despre concept și obiect” (în volumul de față) și comentariul însoțitor.

g) Principiul contextualității — despre care Michael Dummett afirmă că „după toate probabilitățile este cel mai important enunț filosofic al lui Frege” („Nominalism”, în „Philosophical Review”, 65, 4, 1956, p. 491) a fost reluat și extins în filosofia contemporană a limbajului de către gînditori de talia lui Wittgenstein și Quine.

În *Tractatus logico-philosophicus*, principiul intră în textura unei concepții atomiste a limbajului. Ludwig Wittgenstein îl reafirmă în aforismul 3.3: „Numai propoziția are sens; numai în contextul propoziției numele posedă semnificație“, ca și în 3.314: „Expresia are semnificație numai în cadrul propoziției. Fiecare variabilă poate fi privită ca o variabilă propozițională. (Inclusiv numele variabil)“. Dar în același timp, Wittgenstein scrie: „Eu înțeleg propoziția — la fel ca Frege și Russell — ca funcție de expresiile pe care ea le conține“ (3.318).

Ulterior, așa cum se știe, Wittgenstein a îmbrățișat o concepție holistă, sistemică a semnificației care debordează cadrul îngust al logicii. Cuvintele sînt văzute ca dobîndindu-și semnificația în cadrul jocurilor de limbaj, activități lingvistice complexe, părți mari ale fluxului gîndirii și vieții; semnele funcționează, prind viață înăuntrul întregului sistem semiotic.

¹⁹ Cf. în volumul de față § 97 din *Fundamentele aritmeticii* și articolul „Despre concept și obiect“.

¹⁹ Pentru „număr“, Frege folosește atît expresia „Anzahl“, care vizează numărul cardinal cît și termenul mai general „Zahl“; în timp ce „Zahl“ îmbrățișează în sfera sa orice număr — de exemplu cele negative, reale, complexe —, „Anzahl“ poate fi numai 0 sau un număr întreg pozitiv. Traducerea noastră nu a reținut această distincție, cu neputință de a fi redată fidel și natural, însă contextul permite întotdeauna deslușirea sterei de cuprindere a expresiei „număr“.

²⁰ Deși Frege nu menționează ca atare demersul axiomatic sau metoda deductivă, despre acestea este totuși vorba aici. În matematică funcția demonstrației nu este numai de a conduce la adevăruri noi, ci și de a conecta între ele adevărurile într-un sistem deductiv; urmărim deducerea a cît mai multe adevăruri din cît mai puține, fundamentale. Descoperirea adevărurilor primare, originare, este punctul către care trebuie să năzuim, spre a ne întoarce de acolo la teoreme, pe traiectul demonstrațiilor riguroase.

²¹ Aluzie la procedeele logice, puține la număr și tipice, aplicate într-o diversitate de cazuri. Demersul deductiv evidențiază repetitivitatea metodelor de definire și de demonstrare.

²² Conceptele amintite — introduse de Kant în *Critica rațiunii pure* — izvorăsc din distincțiile între adevăruri necesare și contingente, raționale și de fapt, distincții trasate de către Hobbes, Leibniz, Hume și Kant, și comportînd atît aspecte pur logice cît și epistemologice. Discutarea acestei distincții a constituit axa controverselor între empirismul și raționalismul secolelor XVII—XVIII. Cf., de exemplu, cartea lui Mircea Flonta, *Adevăruri necesare?* (Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1975; v. în special cap. I, II, pp. 13—28).

²³ Deși Frege începuse prin a spune că el nu atribuie un sens nou distincțiilor filosofice puse în joc, precizările sale au semnificația unei adevărate regîndiri a întregii probleme. În primul rînd, distincția analitic-sintetic nu mai este considerată exclusiv la nivelul judecăților „în care este gîndit raportul dintre un subiect și un predicat” (Kant), adică la nivelul logicii tradiționale. Pînă și un gînditor de talia lui Leibniz, care în alte privințe a anticipat viziunea logică, rămînea tributar aici paradigmei tradiționale. În al doilea rînd, pentru Leibniz și Kant, adevărurile analitice se arată a fi cele reductibile la o expresie deductibilă din legea identității sau aceea a necontradicției, precum și din definiții; legile logice generale pe care Frege le are în vedere aparțin însă logicii propozițiilor și predicatelor.

O propoziție analitică este deci, pentru Frege, una deductibilă din propozițiile adevărate ale logicii. Acestea din urmă sînt *per definitionem* analitice. V. și nota 25.

²⁴ Propozițiile *a posteriori* sînt, prin urmare, factuale iar demonstrația lor se bazează pe ceea ce mai tîrziu aveau a se numi propoziții atomare. Este unul din puținele pasaje din opera lui Frege în măsură de a sugera că trebuie să admitem cumva propoziții atomare, respectiv fapte atomare — ipoteză fundamentală pe care se reazemă *Tractatus logico-philosophicus*. Să se observe însă că nu orice adevăr fără generalitate care cuprinde un enunț despre obiecte determinate este *eo ipso* factual; el mai trebuie să fie și indemonstrabil. Propozițiile singulare din aritmetică, de exemplu „2 este mai mic decît 3”, sînt și ele enunțuri singulare despre obiecte determinate, rămînînd totuși, pentru Frege, *a priori*.

²⁵ Această remarcă este întrucîtva consonantă cu ideea analiticității ca rezolubilitate a unui complex în elementele sale mai simple, idee pe care atât Leibniz cît și Kant o reliefașeră cu stăruință, deși în contexte și țeluri divergente. Astfel, Kant: „Judecățile analitice... le-am putea numi și *judecăți explicative*, fiindcă... nu adaugă prin predicat nimic la conceptul subiectului, ci numai îl descompun prin analiză în conceptele lui parțiale, care erau deja gîndite în el (deși confuz)” (*Critica rațiunii pure*, Ed. Științifică, 1969, pp. 48—49). Sau: „judecățile analitice nu extind de loc cunoștința noastră, ci... conceptul, pe care îl am, este descompus și îmi este făcut inteligibil mie însumi” (*ibid.*, p. 49). — Nu putem omite însă nici deosebirea substanțială dintre cele două modalități de abordare. Pentru Leibniz și Kant, o propoziție analitică este des-facere clarificatoare a unui conținut primar, deci analiză *in actu* suprapusă peste sinteza judicațională, în timp ce pentru Frege, propozițiile analitice sînt mai curînd cele rezolubile dar nu încă rezolvate în conceptele mai simple și totodată mai generale. Totodată, Frege, preocupat să separe conținutul obiectiv al propozițiilor de raportarea la acest conținut a subiectului care judecă nu reține, în caracterizarea din § 3 a adevărurilor analitice, ideea caracterului neinformativ al acestora din urmă. Logica și matematica nefiind pentru Frege construcții lingvistice, obiectele și conceptele logice nefiind ficțiuni, adevărurile logice se prezintă ca obiective și informative pe măsura universalității lor. Mai mult: întrucît punctul de plecare în logica fregeană nu este conceptul, ci judecata, adevărurile analitice nu mai au cum să desfășoare concepte preexistente; ele provin din adevăruri inițiale.

²⁶ Trecînd în revistă ideile lui Hobbes, Locke, Newton, precum și ale altor filosofi moderni, Frege trimite în repetate rînduri la cele două volume ale cărții *Die Lehren von Raum, Zeit und Mathematik in der neueren Philosophie nach ihrem ganzen Einfluss dargestellt und beurtheilt* a lui Joh. Julius Baumann (Berlin, Druck und Verlag vom Georg Reimer, 1868). Cartea, o antologie comentată, își propunea să urmărească influența pe care matematica o exercită încă de la începuturile filosofiei moderne asupra elaborării conceptelor și metodelor filosofice; în mod deosebit era relevantă înrîurirea concepției despre matematică asu-

pra conceptului de filosofie, asupra metodei și logicii celor mai de seamă cugetători din secolele XVII—XVIII.

Pasajele din Hobbes, Locke, Newton la care se face aluzie sînt luate din: Hobbes, *Examinatio et Emendatio Mathematicae Hodiernae*, Amsterdam, 1668, Dialogurile I—III, în special I, p. 19 și III, pp. 62—63; Locke, *Eseu asupra intelectului omenesc*, Cartea a IV-a, capitolele IV, § 6 și VII, §§ 6, 10; Newton, *Arithmetica Universalis, sive de Compositione et Resolutione Arithmetica Liber*, vol. I, cap. I—III.

²⁷ Vezi *Critica rațiunii pure*, în traducerea lui Nicolae Bagdasar și Elena Moisuc, Ed. Științifică, 1969, pp. 191—192.

²⁸ Hermann Hankel (1839—1873), matematician german, a dezvoltat ideile lui Riemann; a adus contribuții în teoria funcțiilor, în istoria și filosofia matematicii.

²⁹ Vezi *Critica rațiunii pure*.

³⁰ Hermann Günther Grassmann (1809—1877), matematician și sanscritolog german, este unul din întemeietorii calculului vectorial și tensorial modern. Cartea sa *Die Wissenschaft der extensiven Größen oder die Ausdehnungslehre* (Leipzig, 1844, ediție revizuită, 1862) a trecut aproape neobservată la apariție. Calculul lui Grassmann cu mărimi extensive compuse din n unități reprezintă o geometrie n -dimensională corespunzătoare unui calcul numeric generalizat. Ca unul din pionierii algebrei abstracte, Grassmann a formulat principiile unei metode de generalizare succesivă a operațiilor cu numere, pe care le trata în spirit abstract, considerînd exclusiv proprietățile lor pur combinatorii. Față de acest demers abstractizant care presupune punerea între paranteze a conținutului conceptual al operațiilor, Frege a manifestat serioase rezerve de ordin filosofic.

³¹ John Stuart Mill (1806—1873), logician și economist englez, a dezvoltat o concepție empiristă asupra logicii în cunoscutul său *System of Logic Ratiocinative and Inductive, being a Connected View of the Principles of Evidence and the Methods of Scientific Investigation* (London, 1843). Pentru ideile directe ale logicii lui Mill, vezi și *Dezvoltarea logicii* de W. și M. Kneale (vol. I, traducere de Cornel Popa, Ed. Dacia, 1974, pp. 395—401).

³² Definiția genetică a numerelor naturale este acceptată de către Frege, însă acesta din urmă, pe de o parte, respinge întemeierea empiristă a la Mill, iar pe de altă parte consideră că se poate merge mai departe, traducându-se în termeni pur logici definiția obișnuită a unui număr natural dat ca rezultând prin adăugarea unei unități la predecesorul său imediat.

³³ Într-adevăr, numărul 0 este o achiziție relativ târzie. În matematica europeană, el reprezintă un împrumut din matematica indiană, mijlocit de arabi.

³⁴ Adevărul unei propoziții matematice este independent de modul în care ajungem să-l stabilim, susține Frege. *A fortiori*, el nu trebuie pus în dependență de factori empirici ori psihofiziologici. Frege înțelege deci să despartă complet epistemologia genetică de considerațiile logico-gnoseologice referitoare la natura adevărilor matematice, la conținutul pe care acestea le exprimă. În spirit raționalist, Frege va preciza, nu odată, în cuprinsul *Fundamentelor aritmeticii*, că aplicabilitatea la experiență nu dovedește conținutul intrinsec empiric al propozițiilor matematice (a se vedea și nota 12).

³⁵ *Nouveaux Essais sur l'Entendement Humain*. Afirmția lui Philalèthe se inspiră din Locke (*Eseu asupra intelectului omenesc*, cartea II, cap. XVI, § 5); vezi ed. rom., vol. I, Ed. Științifică, 1961, p. 185).

³⁶ Este vorba, evident, despre spațiul obișnuit, euclidian, considerat ca omogen și izotrop și abstracție făcând de orice sistem de coordonate care i s-ar putea asocia.

³⁷ Proprietățile aritmetice — și în general matematice — ale numerelor nu sînt contingente, spre deosebire de proprietățile lor legate de aplicabilitatea conceptelor și propozițiilor aritmetice. Astfel, proprietățile lui 5 de a fi impar, prim, egal cu $2+3$, etc. sînt necesare și totodată decurg în mod necesar din definițiile numerelor respective, precum și din aceea a adunării; dimpotrivă, proprietatea lui 5 de a fi identic cu numărul degetelor unei miini este contingentă. Însă, întrucît aritmetica are a se ocupa numai de proprietățile pure ale numărului, inducția nematematică nu ne poate fi de nici un folos, iar considerațiile lui Mill despre

sursa inductivă a adevărurilor aritmeticii se dovedesc, în această ordine de idei, irelevante. Cu atât mai puțin se poate spera să obținem legile generale ale aritmeticii prin inducție empirică, à la Mill.

³⁸ Previziunea lui Frege s-a confirmat întru totul: logica inductivă de astăzi se sprijină pe teoria probabilităților și este o disciplină cu un grad înalt de matematizare.

³⁹ Pasajele la care se face aluzie sînt din *Avant-Propos* și cap. 1 al Cărții I din *Nouveaux Essais sur l'Entendement Humain*.

⁴⁰ Cf., ed. rom., 1969, p. 65.

⁴¹ Frege admite fără ezitare caracterul sintetic al propozițiilor geometriei; totuși, cum vedem, el nu se pronunță în mod explicit asupra naturii lor apriorice. Nu se poate presupune că Frege ar avea oarecări reticente în a îmbrățișa *dictum*-ul kantian asupra apriorismului axiomelor geometriei, căci el aderă explicit la el în § 89, dar este curios că aici el *pare* a pune geometria în rîndul științelor empirice. Pe de altă parte, o intuiție spațială care poartă numai asupra experienței reale, nu și asupra celei imaginare, poate fi numai aceea a spațiului euclidian. Spațiile ne-euclidiene nu sînt direct intuibile, însă pot fi *gîndite*, în pofida faptului că ele contrazic intuiția.

Spre sfîrșitul vieții sale, Frege a abandonat total doctrina logicistă, ajungînd să vadă în „sursa geometrică a cunoașterii” — pe care o caracterizează ca pe „acea sursă de cunoaștere din care izvorăsc axiomele geometriei” — *axiome* în accepția lor originară de adevăruri intuitive — fundamentul întregii matematici, inclusiv al aritmeticii.

⁴² Este vorba despre *Scrisoarea către Gabriel Wagner, Despre Utilitatea Artei Rațiunii sau Logica* (1696).

⁴³ În *De Scientia Universali seu Calculo Philosophico*, Leibniz scrie: „Discrimen inter veritates necessarias et contingentes vere idem est, quod inter numeros commensurabiles et incommensurabiles; ut enim in numeris commensurabilibus resolutio fieri potest in communem mensuram, ita in veritatibus necessariis demonstratio, sive reductio ad veritates identicas locum habet”.

⁴⁴ Vezi *Corespondența lui Leibniz cu Arnauld*, în G. W. Leibniz, *Opere filosofice — I* (Ed. Științifică, p. 204). Potrivit lui Leibniz, nu numai adevărurile rațiunii, ci și cele de fapt, contingente, ar fi aprioric demonstrabile; demonstrația lor ar presupune însă preștiința divină, pe care Leibniz o și postulează, în tentativa extrem-raționalistă de a privilegia lumea reală ca optimă, deci ca minimal rea. W. Kneale rezumă astfel poziția lui Leibniz: acesta „susține în mod pregnant că toate propozițiile adevărate, inclusiv cele singulare, sînt identități virtuale, deși singur Dumnezeu le poate cunoaște *a priori*. Există desigur o distincție între adevărurile rațiunii, care sînt valabile pentru toate lumile posibile, și adevărurile de fapt, care sînt într-un sens contingente, deoarece ele depind de voința lui Dumnezeu și sînt valabile numai pentru lumea reală. Dar principiul rațiunii suficiente ne asigură că chiar adevărurile de fapt sînt necesare, întrucît nimic nu se întîmplă fără un temei. În *orice* propoziție adevărată, conceptul subiect conține conceptul predicat și deosebirea dintre adevărurile rațiunii și adevărurile de fapt rezidă pur și simplu în aceea că ultimele nu pot fi demonstrate fără referire la acea superioritate a realului care l-a determinat pe Dumnezeu să le aleagă dintre toate lumile posibile” (William Kneale și Martha Kneale, *Dezvoltarea logicii*, vol. 1, p. 356). Pentru o discuție mai amănunțită, a se vedea, de ex. capitolul III: „Propozițiile contingente și legea rațiunii suficiente” din cartea lui Bertrand Russell despre Leibniz (*La philosophie de Leibniz*, trad. franc., Alcan, 1908) și cap. 25 din G. W. Leibniz. *Viața și personalitatea filosofică* de Dan Bădărău (Ed. Științifică, 1966).

⁴⁵ W. Stanley Jevons (1835—1882), economist și logician englez, reformator al algebrei lui Boole și pionier în proiectarea mașinilor logice. Jevons a reușit să simplifice calculul logic, înlocuind disjuncția exclusivă a lui Boole cu disjuncția inclusivă, ale cărei legi sînt duale cu legile conjuncției. A eliminat totodată substracția și diviziunea logică din rîndul operațiilor folosite în algebra logicii. A dezvoltat o concepție logicistă asupra matematicii. Lucrarea principală a lui Jevons, *The Principles of Science* (Londra, 1874; ed. a 2-a, 1877), la care se referă în cîteva rînduri și Frege, dezvoltă ideile logicianului englez în domeniul meto-

logiei științei și descrie „pianina logică“, un strămoș al computerilor de astăzi.

⁴⁶ J. S. Mill, *op. cit.*, Cartea a II-a, cap. VI, § 2.

⁴⁷ Secțiunea este semnificativă pentru filosofia fregeană a logicii; respingerea totală a formalismului gol, a concepției după care putem opera cu semne lipsite de conținut, a stat întotdeauna printre preocupările celui ce a elaborat *Scrierea conceptuală*. O întreagă istorie se află în spate. Tradiția nominalistă engleză îl condusese pe Hobbes la teza că a gândi înseamnă a calcula. Venită pe continent, această idee intră, cu Leibniz, pe făgașul raționalismului, calculul fiind visat ca un mod privilegiat de a gândi prin intermediul unui instrument perfect de analiză și compunere a ideilor. Întoarsă pe pământ britanic, după un secol și mai bine, echivalarea gândirii cu calculul prezidează prin Boole constituirea algebrei logicii. A opera cu semnele potrivit unor reguli formale, abstracție făcând de interpretările conferibile formulelor simbolice, devine un procedeu de prestigiu, extrapolat dincolo de granițele algebrei. Aparatul formal al logicii dovedindu-se o algebră, gândul că algebra, și cu ea matematica întreagă, ar fi la rîndul ei o logică evoluată (cf. secțiunea precedentă) era firesc să capete prestigiu. Dar întrucît logica devenise calcul logic, cu formule susceptibile să capete felurite interpretări și manipulate *ca și cum* nu ar fi avut actualmente nici una, se consolidase prejudecata că a calcula înseamnă a nu gândi ori a gândi în gol. Reacția lui Mill împotriva manipulării iscusite și artificioase a semnelor de limbaj nu însemna nicidecum o repunere a gândirii în drepturile ei; ea izvora numai din tentația unei resorbiri a matematicii în empiria faptelor observabile. A gândi, pentru Mill, înseamnă a agrega inductiv și a segrega deductiv observațiile făcute asupra lucrurilor sensibile. În replică, Frege reafirmă crezul normal al matematicianului, care vede în activitatea sa nu un balet mecanic al semnelor, ci o supremă creație rațională. Dacă deci Hobbes spusese că a gândi înseamnă a calcula, iar Mill, dealtfel tot în spirit nominalist, ajunsese să creadă că a calcula înseamnă a nu gândi, Frege va deplasa accentul *dic-tum*-ului hobbesian și totodată îl va contrazice formal pe Mill: a calcula înseamnă tocmai a gândi. Dacă aritmetica nu este a

pietricelor și a turtelor dulci (a se vedea Introducerea lui Frege la opusul de față, p. 35), ea nu este nici a semnelor lipsite de orice conținut: „este posibil ca limbajul simbolic al matematicii să fie astfel construit, prin intermediul gândirii reale, încît ulterior, ca să spunem așa, să gîndească el pentru noi“ (tot Introducerea, pp. 31—32). Pentru Frege, semnele lipsite de conținut sînt inoperante; ele sînt simple obiecte materiale cu care nu se poate face nimic, întrucît nu comunică nimic. Semnul încorporează întotdeauna, face sensibil un conținut de gîndire, reificîndu-l. Folosirea unui limbaj simbolic prezintă multiple avantaje, printre care acela al prezentării intuitiv-sensibile a structurii logice a matematicii, dar în nici un caz nu epurează matematica de conținutul ei, de gînd.

În poziția de principiu a lui Frege se ascunde însă, totodată, o anumită lipsă de receptivitate față de demersul algebrei logicii. Frege nu crede că forma se poate separa efectiv de interpretare, nu acceptă că un aparat simbolic poate fi manipulat exclusiv pe baza unor reguli de calcul, abstracție făcînd de orice interpretare. Conținutul unui calcul — crede el — nu poate fi pur operațional, conferit așadar de reguli stipulate după bunul plac, interpretarea este subînțeleasă; orice formulă are un conținut conceptual *ab initio*, altfel nici nu l-ar putea primi ulterior, pluralitatea interpretărilor adăugîndu-se numai unui conținut general gîndit acolo din capul locului. — Dificultatea lui Frege în a înțelege fecunditatea axiomaticii formale propusă de Hilbert spre sfîrșitul veacului XIX a fost reversul insistenței sale de a arăta că a calcula înseamnă a gîndi.

⁴⁸ Așadar, dacă aritmetica este un sistem ipotetico-deductiv, teoremele ei vor fi totuși propoziții analitice, și anume implicații; dar o propoziție analitică de forma unei implicații poate fi alcătuită din componente sintetice.

⁴⁹ În *Arithmetica Universalis; sive de Compositione et Resolutione Arithmetica Liber*, Newton scrie: „Per Numerum non tam multitudinem unitatum quam abstractam quantitatis cujusvis ad aliam ejusdem generis quantitatem quae pro unitate habetur rationem intelligimus“ (ed. 1732, p. 4). (Prin număr înțelegem nu atît o mulțime de unități cît raportul abstract al unei cantități

oarecare față de o altă mărime de același gen, luată (de noi) ca unitate).

⁵⁰ Asupra tratării acestei probleme la Euclid și în întreaga gândire matematică elină, a se vedea cap. II — Secțiunea C. Teoria proporțiilor, din O. Becker, *Fundamentele aritmeticii*, Ed. Șt., 1968, p. 117.

⁵¹ Secțiunile subsumate acestui titlu (§§ 21—25) urmează să analizeze și să răspundă negativ la întrebarea dacă numărul nu este cumva o proprietate a lucrurilor sensibile. *Sensul* acestei întrebări trebuie în prealabil statornicit cu grijă. În unele contexte, „proprietate“ (*Eigenschaft*) și „concept“ sînt termeni pe care Frege îi apropie ca înțeles (vezi, de exemplu, § 53 a scrierii de față și „Despre concept și obiect“, în culegerea de față, p. 300). De aceea, s-ar putea crede că întrebarea formulată în titlul de mai sus ar admite parafraza: este numărul un concept de ordinul întâi? (asupra distincției de ordin între concepte a se vedea § 53, *in fine*). Totuși, lucrurile nu stau așa. Considerațiile lui Frege sînt îndreptate împotriva înțelegerii numărului ca proprietate și ca abstras din lucruri în același fel ca proprietățile generale ale lucrurilor sensibile. După Ignacio Angelelli: „Pare necesar să interpretăm accepția pe care Frege o dă aici lui «*Eigenschaft*» ca însemnînd mai curînd *accident* și, mai precis, *accident individual*, întrucît aici Frege presupune următoarea axiomă: dacă *F* este o proprietate a unui lucru exterior (fizic, sensibil), atunci *F* însuși este extern (fizic, sensibil). *Eigenschaften* sînt concepte și, potrivit înțelegerii fregeene a conceptelor, nu este adecvat să considerăm că conceptul *a fi o piatră* este mai „sensibil“ sau mai „fizic“ decît conceptul *a fi rădăcină pătrată din 2*. Or, dacă aici s-ar viza acest mod normal de înțelegere a proprietăților, ar fi imposibil să înțelegem argumentul lui Frege că numerele nu pot fi proprietăți ale lucrurilor sensibile, întrucît ele se aplică și la entități non-sensibile. Pentru a înțelege acest argument este necesar să presupunem axioma menționată mai sus. Dar atunci întrebarea generală: „Este oare numărul o proprietate a lucrurilor exterioare?“ trebuie reformulată propriu-zis ca: „Este oare numărul un lucru exterior (fizic, sensibil)?“ În plus, mai întîlnim unele referiri la posibila întrebare dacă numerele nu sînt cumva

proprietăți (concepte) sau obiecte în sens «logic», dar aceste referiri sînt accidentale” (I. Angelelli, *Studies on Gottlob Frege and Traditional Philosophy*, Dordrecht, Holland, D. Reidel, 1967, p. 232).

⁵² Folosirea unui cuvînt în formă adjectivală și în construcție atributivă este unul din criteriile care indică statutul său de termen conceptual și nu de nume propriu (vezi și articolul „Despre concept și obiect”). În cazul numărului însă, aparențele limbajului obișnuit sînt înșelătoare: numărul nu este utilizat ca predicat sau atribut; vom vedea că este un obiect, fiind ca atare desemnat de un nume propriu.

⁵³ Moritz Cantor (1829—1920), matematician și istoric al matematicii.

⁵⁴ Frege, evident, nu poate primi acest argument. El nu contestă geneza empirică a aritmeticii, nici aplicabilitatea numărului în domeniul lumii fizice, dar crede că asemenea observații nu sînt relevante pentru chestiunea în discuție. Procesul de obținere a numărului nu este de aceeași natură cu procesul prin care abstragem din lucruri proprietățile lor sensibile, reținînd ceea ce aceste proprietăți au general și comun; pe de altă parte, așa cum se va lămuri mai jos, numărul este aplicabil *nu numai* în domeniul lucrurilor concret-sensibile, deci este greșit a-l identifica unei proprietăți ca greutatea sau culoarea lucrurilor.

⁵⁵ Este, prin urmare, un non-sens a vorbi despre numărul *unui* obiect. Întrebarea al cărei răspuns constituie o aserțiune numerică (Zahlangabe) nu are aceeași structură ca întrebarea: ce greutate sau ce culoare are obiectul acesta? Pe de altă parte, așa cum va arăta în continuare Frege, dacă mă întreb asupra numărului unor *obiecte*, eu subsumez totodată obiectele în cauză unui *concept* și tocmai acestuia din urmă îi revine numărul. Întrebînd, spre exemplu, cîte *cărți de joc* conține un pachet, răspunsul poartă asupra conceptului *Carte de joc din pachetul de față*.

⁵⁶ În bună tradiție scolastică, putem parafraza după cum urmează: numărul nu este accident al substanței individuale, așa cum este o anumită culoare în raport cu lucrul sau cu acea parte

a lucrului care manifestă o anumită culoare fiind astfel purtătorul real al acesleia.

⁵⁷ Să se observe că Frege spune: numărul revine unui anume ceva în raport cu un mod arbitrar de concepere, și, nicidecum nu: numărul revine în mod arbitrar acestui ceva. Arbitraritatea pusă în joc aici este analoagă aceluia bun plac, de pildă, care, fără a ține de răspunsul la o întrebare, ține de posibilitatea formulării întrebării. Căci am libertatea de a pune o întrebare sau alta, în legătură cu unul și același lucru, în funcție de modul în care îl concep: odată fixată însă, întrebarea corectă admite un singur răspuns corect. Numărul nu ne este dat în senzație; ceea ce ne este dat în senzație, după Frege, este perfect obiectiv (chiar dacă, așa cum se va preciza în alte locuri, organele de simț introduc un anumit element subiectiv, acesta din urmă nu alterează cu nimic faptul că senzația are o sursă obiectivă și este un mijloc de cunoaștere obiectivă). Proprietățile senzoriale îi revin lucrului în mod obiectiv; nefiind o asemenea proprietate, determinarea numerică este arbitrară în sensul de mai sus; dar această arbitraritate nu trebuie înțeleasă ca introducând un element subiectiv sau convențional, decît în același sens în care este subiectivă, de exemplu, alegerea unei întrebări și nu a alteia dintr-un set întreg de întrebări ce se pot formula în legătură cu un anumit obiect. Așa se explică insistența lui Frege în a demonstra că numărul nu este ceva de ordin subiectiv (a se vedea îndeosebi §§ 26, 27) și că aserțiunea numerică „exprimă ceva real, independent de modul nostru de a privi lucrurile” (§ 47), obiectivitatea adevărului ei fiind solidară cu aceea a conceptului pus în cauză.

⁵⁸ *Eseu asupra intelectului omenesc*, Cartea a II-a, cap. XVI, § 1 (cf. ed. rom., Ed. Șt., 1961, vol. I, p. 184).

⁵⁹ Fragmentul avut în vedere este desprins din faimoasa *Dissertatio de Arte Combinatoria*: „Falso autem scholastici credidere numerum ex sola divisione continui oriri, nec ad incorporea applicari posse. Est enim numerus quasi figura quaedam incorporea, orla ex unione entium quorumcunque, v. g. DEI, Angeli, Hominis, Motus, qui simul sunt quatuor. Cum igitur numerus sit quiddam

universalissimum, merito ad Metaphysicam pertinet" (ediția Erdmann, p. 8).

⁶⁰ Din *Historia et Commendatio Linguae Charactericae Universalis Quae Simul Sit Ars Inveniendi et Judicandi* (vezi ed. Erdmann, p. 162).

⁶¹ Altfel spus, „triumghiular“ în cazul de față nu mai trebuie asociat proprietății de a avea trei unghiuri, ci unor impresii senzoriale nemijlocite.

⁶² Oarecum în treacăt, Frege rezumă în această frază ceea ce delimitează propria lui epistemologie a aritmeticii de epistemologia tradițională. Cum am mai spus, modul în care, pornind de la percepția obiectelor concret-senzoriale, subiectul cognitiv ajunge să opereze cu numere naturale nu este nicidecum analog modului în care se abstrage o proprietate comună mai multor obiecte; perceperea triumghiului declanșează așadar o activitate intelectuală „care conduce la o judecată în cadrul căreia intervine numărul 3“. Esența chestiunii rezidă în faptul că numărul apare în și prin judecata numerică, așa cum se va arăta mai jos, ceva mai detaliat. Judecata numerică este produsul unei activități intelectuale: numărarea, al cărei preludiv este fixarea unui concept, în vederea stabilirii numărului obiectelor care cad sub acesta.

⁶³ Semnele sînt semne numai în măsura în care au un conținut, o semnificație; interesează, de aceea, nu proprietățile lor materiale, ci proprietățile care decurg din regulile lor de folosință, potrivit semnificației ce li se conferă. Astfel, nesaturarea expresiilor care desemnează funcții manifestă o proprietate a funcțiilor înseși (vezi articolele „Funcție și obiect“. „Despre concept și obiect“).

⁶⁴ Diferența numerică corespunde unei diferențe nu fizice, dar conceptuale. Numere diferite se atribuie unor concepte diferite.

⁶⁵ *An Essay towards a new Theory of Vision*, § 109.

⁶⁶ După ce a arătat că numărul nu este o entitate fizică sau o proprietate fizică, Frege trece la combaterea punctului de vedere subiectivist. La întrebarea: este numărul ceva subiectiv? Frege va răspunde cu o categorică negație. Critica sa — după

cum remarcă I. Angelelli (*op. cit.*, pp. 232—233) — vizează două ținte: pretenția demersului psihologist de a lua locul investigației aritmetice și conceperea numărului ca reprezentare. A fi ceva subiectiv înseamnă în sensul tare a fi o reprezentare, *conceptus subiectivus*, accident individual al unui cuget individual. În sens mai slab, remarcă în continuare Angelelli, subiectivul implică o referire la subiect, dar nu la ceea ce este individual în subiect, ci la ceea ce acesta are comun cu întreaga clasă a subiecților individuali. Această „subiectivitate transcendentă” ar coincide cu „obiectivitatea transcendentă”, obiectivitatea în sens slab care rezidă în însușirea de a fi accesibil și același pentru toate cugetele individuale. Or, „în timp ce Frege are în mod clar cele două sensuri ale „obiectivului” (deși nu introduce denumiri distincte pentru ele), el are numai o singură accepție a „subiectivului” — cea tare. În această accepție, numerele nu sînt subiective, adică nu sînt *Vorstellungen*, ceea ce din capul locului este limpede” (Angelelli, *op. cit.*, p. 234).

⁶⁷ Compararea matematicii cu geografia, a numerelor cu munții sau mările, revine în mai multe rînduri sub pana lui Frege. Matematica este prin excelență, pentru dînsul, descoperire și nu invenție, matematicianul fiind un explorator al tărîmului obiectiv. Obiectivitatea este aici înțeleasă în sensul tare, primordial: independență față de subiect.

⁶⁸ Așadar, determinarea numerică (*Zahlangabe*) poate fi sintetică a posteriori, numerele fiind utilizabile în cadrul enunțurilor factuale; de aici se naște și iluzia empiristă a înțelegerii numărului ca entitate de ordin fizic.

⁶⁹ Raportul obiectiv-real pus aici în joc de către Frege clarifică orientarea sa ontologică; fiind de găsit la Kant, distincția este susceptibilă să alimenteze cu argumente ipoteza orientării kantiene a lui Frege. Trebuie să amintim însă că la Kant obiectivitatea coincide cu subiectivitatea transcendentă, adică presupune raportarea la subiectul în genere, în timp ce Frege omite aici (nu însă în alte locuri, d. ex. în § 105, primul alineat) distincția kantiană. Altfel spus, Frege înțelege obiectivitatea în sensul tare și primar al cuvîntului, ca independență față de conștiința umană. Totodată, Frege atribuie gîndirii funcția de a recunoaște,

de a reconstrui însă nu de a construi domeniul obiectivului, ceea ce, deși nu presupune o desolidarizare categorică de doctrina kantiană, reprezintă în orice caz o mutare semnificativă de accent într-o chestiune crucială. Epurate de bogatele conotații gnoseologice din scrierile lui Kant, termenii „obiectiv” și „real”, chiar dacă vor fi fost împrumutați de Frege direct sau în ultimă instanță de la Kant, ajung să propună o ontologie realistă, distanțată atât de excesul platonician cât și de constructivismul transcendențial-subiectiv kantian. În concordanță cu acest mod de a înțelege ontologia lui Frege se află refuzul de a echivala obiectivul cu realul.

⁷⁰ Argumentul materialismului dialectic nu este altul; pare destul de evident că Frege raționează aici la un nivel superior materialismului istorico-naturalist al epocii. Printre puținii contemporani în măsură să aprecieze un asemenea raționament s-ar fi putut număra Engels.

⁷¹ Sensul acestei observații pierde din încărcătura sa specific kantiană, dacă reținem că pentru Frege „elementul logic, conceptual, judicabil” nu este opera intelectului, nu este operă umană, nu este rezultatul unei construcții a subiectivului individual sau măcar a subiectului generic. Să menționăm, totodată, că o conotație a „obiectivului” este, potrivit lui Frege, capacitatea de a fi comunicabil. De unde am putea specula că obiectivitatea în sensul tare este chiar pentru logicianul de la Jena garantul și suportul obiectivității în sensul mai slab de a fi cognoscibil, de a fi accesibil și același pentru toți.

⁷² „Evaluarea estetică” trimite aici, de bună seamă, la ceea ce este dincoace de frumos sau urât, la accepția primară a „esteticului”, restituită de Kant: receptare prin simțuri, sensibilitate.

⁷³ *Gedankenexperiment-ul* imaginat de Frege merge dincolo de Kant, întrucât își propune să arate că elementul subiectiv înglobat în orice intuiție sensibilă este depășit prin opera rațiunii, fără concursul unui element *a priori*. Subiectiv, pentru Frege, este ceea ce prin excelență poate fi într-un fel sau altul, pentru cineva sau altcineva, în timp ce obiectiv este ceea ce se prezintă ca același pentru toți. Subiectivitatea senzației este depășită în

obiectivitatea gândirii. În timp ce traducerea cuvintelor în intuiții proprii constituie o decodare subiectivă, traducerea intuițiilor proprii în cuvinte asigură comunicarea unui conținut obiectiv. În folosirea lor primordială, cuvintele au același sens pentru toată lumea, tocmai pentru că sensul lor nu stă în intuiția specifică ce traduce cuvântul în lumea interioară a unei ființe raționale sau alta; judecățile adevărate (spre pildă teoremele geometrice) ajung a fi recunoscute ca adevărate de către toată lumea, inclusiv de ființe raționale ale căror intuiții spațiale diferă în mod radical de ale noastre, fiindcă cuvintele își păstrează același sens. Dar aceasta presupune nu numai faptul că în cuvânt este reținut, spre a fi comunicat, elementul comun al intuițiilor diferite (diferența dintre intuițiile sensibile provenite din una și aceeași sursă nici măcar nu se lasă descrisă nemijlocit în cuvinte, deși putem să facem aluzie la ea în discurs), acest element comun fiind înțelesul, același pentru toți, al cuvântului; mai trebuie să presupunem și că sensul cuvintelor trebuie căutat în contextele propoziționale în care intră. Într-adevăr, ar fi cu neputință a ne sustrage următoarei alternative: sau înțelesul cuvintelor este condamnat să fie diferit, în funcție de reprezentările și intuițiile diferite care le sînt asociate (ceea ce Frege nu admite decît parțial, el trasînd o distincție între sensul cuvintelor și nuanțele, coloritul lor specific — a se vedea „Despre sens și semnificație“), sau înțelesul cuvintelor va fi același pentru toată lumea. Or, înțelesul trebuie să fie același, de vreme ce comunicarea între oameni prin intermediul limbajului și cunoașterea adevărului obiectiv sînt indiscutabile. În al doilea caz, cel admis și de Frege, rămîne un mister cum cuvintele ar mai putea păstra același înțeles, — intuițiile asociate cuvîntului izolat fiind diferite — dacă acest înțeles nu ar fi contribuția adusă de cuvîntul izolat nu numai la sensul dar și la adevărul unor propoziții. Prin faptul că recunoaștem adevărul unor judecăți comunicate în propoziții dovedim că putem depăși subiectivitatea intuiției, plasîndu-ne pe un teren comun tuturor ființelor raționale. Principiul contextualității semnificației este, cum vedem, angajat la rîndul său în această încercare de explicație.

⁷⁴ Dependența obiectivității față de rațiune este de ordin gno-seologic, nu ontologic; Frege însuși nu spune, în fond, altceva.

Rațiunea nu este aici demiurgul, ci temelul; ea recunoaște ceea ce este adevărat, independent de conștiința umană, ajunge astfel la ceea ce este obiectiv, corectînd acolo unde este cazul subiectivitatea intuiției sensibile. Rațiunea recunoaște și cunoaște ca atare ceea ce este *în afara* subiectului, de exemplu numerele. Astfel, în recenzia cărții lui Husserl, *Philosophie der Arithmetik*, Frege caracterizează numerele „în sine”, numerele „reale” ca numere obiective, *întru totul independente față de gîndirea noastră* (în ediția *Kleine Schriften*, Georg Olms, 1967, la pp. 191—192).

⁷⁵ Oskar Schloemilch (1823—1901), matematician german, autor al mai multor manuale și cursuri care s-au bucurat de o largă circulație în epocă.

⁷⁶ Frege consideră că înțelesul (*Bedeutung*) unui cuvînt nu este subiectiv, nu aparține intuiției individuale; tocmai de aceea semantica fregeană nu rămîne tributară subiectivității. Vezi și nota 73. — Aceeași idee este întrucîtva modificată în „Despre sens și semnificație”, unde Frege admite că suprapunerile de nuanță sau colorit peste sensurile cuvintelor din limbajul natural sau poetic țin de facultatea reprezentării, ele fiind însă comunicabile, adică accesibile mai multor cugete umane.

⁷⁷ Frege înțelege „mulțimea” (*Menge*) nu în sensul teoriei mulțimilor, ci ca „multitudine”, „pluralitate” în accepția naivă a acestor expresii; este firesc de aceea, că zero și unitatea nu pot fi înțelese ca „mulțimi” în accepția de mai sus.

Angelelli amintește (*op. cit.*, p. 249) că încă Simplicius, comentatorul grec, făcuse observația că zero și unu nu pot fi numere în cazul cînd numerele sînt mulțimi de unități. Contemporan cu Frege, Husserl va relua la rîndul său în a sa *Filosofie a aritmeticii* din 1891, afirmația după care zero și unu nu sînt propriu-zis numere, ci „răspunsuri negative la întrebarea «cîți?»”. Frege explică pe larg în recenzia opusului husserlian, în ce constă aici eroarea logică. Frege face însă abstracție de o întregă tradiție filosofică și logică, înăuntrul căreia mulțimea era privită ca extensiune a unui concept, fiind astfel înțeleasă ca clasă în sens logic; admiterea clasei vede și a claselor cu un singur element nu mai era o noutate în epoca lui Frege, dar nici nu era unanim admisă. Pentru Frege, extensiunea conceptelor înseamnă cu totul

altceva decât „mulțimea“. Frege privea „mulțimile“ ca pe formațiuni gregare, rău definite din punct de vedere logic, lipsite de structură intrinsecă. În consecință, el preferă să vorbească despre concept sau despre extensiuni ale conceptelor; mulțimile sînt pentru el surrogate ale extensiunilor de concepte.

⁷⁸ Carl Johannes Thomae, matematician german, profesor la Universitatea din Jena între 1879—1921. Mai tîrziu Frege a combătut în repetate rînduri cu o vehemență neobișnuită concepția formalistă prehilbertiană a lui Thomae, potrivit căreia matematica ar fi un joc după reguli arbitrare cu simboluri neavînd semnificație. Numerele erau privite ca semne perceptibile lipsite de semnificație, încît nu se mai punea problema de a ști „ce sînt numerele și ce trebuie ele să fie“, ci numai după care reguli de operație manipulăm simbolurile numerice. Asupra polemicii lui Frege cu Thomae, a se vedea, de exemplu, M. și W. Kneale, *Dezvoltarea logicii*, vol. II, pp. 82—85.

⁷⁹ „Unitatea este aceea potrivit căreia fiecare lucru se numește unu. Iar număr, o mulțime compusă de unități“ (Euclid, *Elemente*, vol. II, traducere de Victor Marian, București, 1940, p. 5). Vezi și nota traducătorului despre definiția unității și a numărului la greci (*vol. cit.*, p. 220). Se menționează că „la sfîrșitul veacului trecut concepția numărului a fost supusă unei critici riguroase de către mai mulți matematicieni“, citîndu-se numele lui Grassmann, Weierstrass, R. Dedekind, Cantor, Peano, Enriques, nu însă și cel al lui Frege.

⁸⁰ Frege acordă o pondere deosebită în economia cărții sale analizei numărului unu, convins fiind că aici se poate detecta un aspect deosebit de vulnerabil al concepțiilor combătute; tocmai simplitatea desăvîrșită care pare a fi apanajul numărului unu complică enorm lucrurile, creînd iluzia identificării obiectelor cu unități.

⁸¹ Această observație constituie debutul unei analize logico-gramaticale a înțelesului unor cuvinte ca „unu“, „unitate“, „unitar“ ș.a. (§§ 29—33); Frege excelează în asemenea analize, după cum ne vor dovedi și alte pasaje din *Fundamentele aritmeticii*. În Frege putem descoperi un precursor al filosofiei analitice de astăzi, un practicant al examenului expresiilor limbii în

lumina criteriilor logice; însă aici avem numai un element din bogatul arsenal de mijloace, o parte la care nu este îngăduit să reducem întregul. Analiza fregeană a limbajului, în același timp o critică a limbii și o elucidare a conținutului pozitiv din determinațiile lingvistice, este pusă în slujba unei concepții filosofice mai cuprinzătoare.

⁸² Remarca lui Frege este slujită suplimentar de faptul că în unele limbi, printre care germana, determinativul adjectival este pus de obicei înaintea expresiei substantive „eine Stadt“, „weiser Mann“. Traducerea noastră nu a fost în măsură să redea această trăsătură.

⁸³ Legea raportului invers dintre sfera și conținutul unui concept, așa cum o cunoaștem din logica tradițională.

⁸⁴ Determinările redundante sînt de obicei evitate în folosirea limbajului obișnuit; ca atare „unu“ trebuie să spună ceva nebanal, netautologic. — Pornind de la o premisă analoagă. Frege va ajunge mai târziu la concluzii fructuoase privitor la altă determinare, aparent tautologică, și anume aceea a identității. Dacă un lucru este identic numai cu sine și diferit față de oricare altul, ce rost și ce conținut mai poate avea o propoziție de identitate? Răspunsul a fost aflat în distincția sens-semnificație.

⁸⁵ Argumentație tipic fregeană, reluată în decursul întregii opere: gîndirea noastră nu poate crea *ex nihilo*, dar nici nu poate face abstracție de ceea ce este prezent. „Modul nostru de a vedea lucrurile“ poate afecta numai reprezentările noastre, nicidecum însă obiectele sau conceptele.

⁸⁶ „Existența și unitatea sînt alte două idei sugerate intelectului de fiecare obiect dinafară și de orice idee din interior“ (Locke, *Eseu...*, Cartea II, cap. VII, § 7; în ed. rom., vol. 1, p. 108).

⁸⁷ Abstracția nu se dobîndește prin refuz de a gîndi; Frege ironizează în diferite ocazii această echivalare ilicită, deosebit de propice psihologismului. Atunci cînd totul devine reprezentare, va scrie el, „putem să modificăm cu cea mai mare ușurință obiectele, prin îndreptarea sau abaterea atenției. Îndeosebi aceasta din urmă este eficace. Dacă privim mai puțin la o însușire, ea dis-

pare. Lăsînd astfel să dispară o notă după alta obţinem concepte tot mai abstracte. Aşadar, conceptele sînt şi ele reprezentări, însă mai puţin complete decît obiectele; ele mai au proprietăţi ale aceloră de care încă nu am făcut abstracţie. Lipsa de atenţie este o forţă logică extrem de eficientă; poate că aşa se explică şi felul distrat de a fi al savanţilor" (*Rezension: HUSSERL, Philosophie der Arithmetik*).

⁸⁸ Prin „unitate“ se poate înţelege fie numărul unu, fie însuşirea de a fi indivizibil, fie orice obiect, considerat ca unu. Frege îşi propune să infirme definiţia euclidiană a numărului ca mulţime de unităţi, pentru toate interpretările ce se pot da cuvîntului „unitate“. În joc este acum înţelegerea „unităţii“ ca obiect oarecare; se va demonstra că ajungem în egală măsură la dificultăţi în cazul cînd unităţile se consideră identice şi în cazul opus cînd se consideră distincte. Din infirmarea ambelor ipoteze va rezulta o nouă perspectivă asupra raportului concept-obiect.

⁸⁹ Criteriul la care se face aici aluzie este, desigur, un concept sub care cad ambele obiecte. Potrivit unui asemenea criteriu — şi ne putem reaminti aici etimologia cuvîntului — cele două obiecte sînt *judicate* la fel.

⁹⁰ Hobbes, *op. cit.*, Dial. I, p. 16.

⁹¹ Hume, *Enquiry Concerning Human Understanding*, Sect. XII, partea a III-a, § 131.

⁹² Procesul prin care dobîndim un concept sub care cad lucruri numărate nu trebuie confundat cu acela prin care dobîndim însuşi numărul respectiv. Cum ajungem, dealtfel, *naturaliter*, la acest număr nu-l interesează pe Frege, ci numai ceea ce *este* numărul. — Lucrurile vor fi, aşadar, denumite *unităţi* nu întrucît sînt numărate, ci întrucît cad sub un acelaşi concept (măcar sub conceptul ad-hoc de „lucru supus, *hic et nunc*, numărării“). Conceptul face din lucruri unităţi, el propriu-zis este unitatea (a se vedea § 54, alineatul doi).

⁹³ A spune că numărul este o mulţime de unităţi identice îi pare lui Frege un mod nefericit de a spune că mai multe lucruri distincte cad sub unul şi acelaşi concept. Frege elucidează definiţia numărului în lumina raportului dintre unu şi multiplu,

identitate și diferență, concept și obiect. Critica formulărilor inexacte, în scopul scoaterii la iveală a miezului lor rațional, funcționează aici în mod exemplar.

⁹⁴ *Eseu...*, Cartea a II-a, cap. XVI, § 5; ed. rom., vol. I, p. 185.

⁹⁵ Criteriul logico-gramatical prin care identificăm expresiile care desemnează obiecte. Expresia „numărul unu” este, din punct de vedere logic, nume propriu. Frege apelează în repetate rânduri la acest criteriu. Totuși, identificăm numele propriu nu numai în lumina acestui criteriu, ci și prin alte metode, de exemplu prin faptul că acesta nu poate fi utilizat ca predicat, ci numai ca subiect al unei enunțări.

⁹⁶ Am tradus aici „Begriffswort”, expresie care revine frecvent sub pana lui Frege, prin „termen conceptual”; în alte locuri am mai folosit și denumirea „nume conceptual” etc. Admiterea pluralului este criteriul logico-gramatical care ne permite să constatăm că o expresie lingvistică desemnează nu un obiect, ci un concept.

⁹⁷ Tocmai de aceea nici „determinarea numerică” (asertiunea numerică: *Zahlangabe*), judecata prin care stabilim numărul obiectelor subsumate unui concept dat, nu poartă direct asupra colecțiilor de obiecte. În recenzia sa la *Husserl: Philosophie der Arithmetik*, Frege găsește prilejul de a reveni la concepția eronată îmbrățișată și de Husserl; observînd că o colecție se lasă descrisă prin intermediul conjuncției „și”, Frege constată că „determinările numerice” nu au de obicei forma „A și B și C și ... Q sînt n ”, propozițiile de ultima formă fiind extrem de rar utilizate, iar atunci în scopuri cu totul diferite de acela al stabilirii unui număr. Cu acest prilej, Frege precizează: „În realitate, noi nu întrebăm „cît fac Caesar și Pompei și Londra și Edinburg?” sau „cît fac Marea Britanie și Irlanda?”, iar în ce mă privește sînt curios să aflu ce răspuns ar da la aceasta autorul. Întrebăm, din contra, „cîți sateliți are Marte?” sau „care este numărul sateliților lui Marte?” și răspunsul „numărul sateliților lui Marte este doi” ne instruește pe măsura întrebării. Vedem, prin urmare, că atît în întrebare cît și în răspuns apare un nume conceptual sau o expresie conceptuală compusă, iar

nu acel „și“ pe care îl cere autorul“ (în *Kleine Schriften*, 1967, p. 185).

⁹⁸ Parafrazănd cîineca spusă după care limba i-ar fi dată omului spre a-și ascunde gîndurile, cineva ar putea nota, în marginea observației lui Frege, că limba este uneori dată spre a camufla dificultatea de a gîndi.

⁹⁹ Lui Frege nu-i scapă deci fenomenul felișizării unor construcții lingvistice; analiza logico-filosofică trebuie să înlătore vîlul mistificațiilor care acoperă adevărul ascuns în determinările limbii. Frege vine cu o altă mentalitate decît aceea a pozitivismului care, denunțînd speculația metafizică drept absurditate goală, nu-și mai pune în nici un chip problema recuperării sensului ei rațional.

¹⁰⁰ Hobbes, *loc. cit.*, p. 45.

¹⁰¹ Leibniz, *loc. cit.*, p. 31.

¹⁰² O concepție diametral opusă asupra rolului timpului în matematică împărtășește intuiționismul brouwerian. Punînd la baza conceptului de număr natural intuiția temporală, intuiționismul filosofic în fundamentele matematicii înțelege să asocieze construcției și devenirii, temporalitatea într-o tentativă de a explica „partea exactă a gîndirii umane“, *id est* matematica.

¹⁰³ De ordin spațio-temporal sînt *obiectele concret-senzoriale*, adică obiectele care au *realitate*, vrea să spună Frege; or, obiectează el, numărul este aplicabil prin intermediul conceptului la (colecții de) obiecte oarecare subsumate acestui concept (conceptul însuși fiind obiectiv, dar neavînd „realitate“). — De la Kant putem prelua însă observația importantă că spațiul și timpul sînt totodată condiții constitutive ale oricărei *experiențe posibile*. Tentativele de a funda *epistemic* (nu psihologic!) aritmetica pe experiența subiectului, conțin, de bună seamă, un element rațional; sub rezerva unei interpretări non-subiectiviste a experienței, înțelegerea numărului natural ca o construcție în experiența posibilă a subiectului nu mai poate fi incriminată ca psihologism. Or, invocarea spațiului și timpului ca factori constitutivi ai experienței posibile pare inevitabilă. Atunci cînd nu acceptă o asemenea abordare, Frege nu este numai antipsihologism în forță.

Prevalîndu-se de faptul că conceptul, obiectiv fiind, nu este totuși de ordin spațial sau temporal, Frege ocolește posibilitatea unei abordări epistemice, mai largă decît aceea strict logică, a problemei numărului. În ultimii ani ai vieții sale, cînd Frege va abandona logicismul, el se va adresa „sursei cognitive geometrice“ (die geometrische Erkenntnisquelle) într-o nouă încercare de a rezolva enigma numărului. — Nu este de prisos să remarcăm, încă o dată, împotriva supraevaluărilor actuale ale elementelor kantiene din *Fundamentele aritmeticii*, că, deși Frege a evitat o confruntare directă între concepția logicistă și concepția lui Kant despre număr, delimitarea categorică față de Kant nu poate scăpa nimănui. Pentru Frege, numărul nu este o construcție, ci o entitate *dată*. Ceea ce construim noi nu este numărul, ci numai definiția lui.

¹⁰⁴ Se observă că Frege evită a angaja o discuție în termeni kantieni asupra *intuiției* spațiului și timpului, intuiție în care, ca într-un mediu unificator, punctele spațiului sau ale timpului ar manifesta *a priori* identitatea cerută, diferențiindu-se numai prin poziția ocupată. Încă o dată, limbajul fregean pornește de la constatări realiste, eschivîndu-se de la tot ce ar putea sugera constructibilitatea, à la Kant, a obiectelor matematicii din intuiții asupra experienței posibile.

¹⁰⁵ Un adversar al punctului de vedere logicist ar putea însă obiecta: „dreptul *logic* de a vorbi despre 45 milioane de germani fără a fi gîndit sau pus în prealabil de 45 milioane de ori un german obișnuit“ îl avem, de bună seamă, însă numai întrucît acest număr este corect definit; cu alte cuvinte, numai întrucît este *în principiu* posibil să construim un șir de 45 milioane elemente, de exemplu să construim șirul numerelor naturale 1, 2, ... 45 milioane ...; în termenii d-voastră chiar, această revine la posibilitatea de a construi definiția numărului 45 milioane; dar această posibilitate a definirii numărului respectiv nu trebuie onorată efectiv — din fericire, pentru că a formula definiția efectivă potrivit indicațiilor pe care le-ați dat mai încolo, în *Fundamentele aritmeticii*, ar fi oarecum incomod.” — În faimoasa lui polemică cu Russell, Poincaré a adus în esență această obiecție împotriva definiției logiciste a numărului.

¹⁰⁶ Comentariul lipsit de simpatie la adresa demersului lui Schröder ca și alte pasaje din *Fundamente* îl înfățișează pe Frege în postura de antiformalist radical. Privind înapoi se poate spune totuși că în poziția antiformalistă a lui Frege intră un element caduc. Argumentul lui Frege, după care a explica simbolul numeric nu înseamnă a explica însuși numărul, întrucât acesta din urmă nu este un semn, rămîne valabil numai dacă excludem modelele semiotice din rîndul demersurilor explicative. Or, în secolul nostru o asemenea excludere este extrem de discutabilă; încă de mult s-a intuit (Schröder nefiind aici decît unul dintre părtașii acestei intuiții) că o bună notație a numărului natural (notația fiind deja în anumite condiții un model semiotic) ar putea manifesta structura acestuia — întrebarea dacă structura numărului este tot una cu esența acestuia rămînînd deschisă. Programul formalist hilbertian a evidențiat interesul metamatematic și în cele din urmă pur matematic al unei asemenea notații: însemnătate are aici nu utilizarea efectivă a notației, ci posibilitatea ei principală. Preocupat cum este de instituirea definiției logice a numerelor, Frege nu face dreptatea cuvenită demersului semiotic în matematică, ceea ce nu constituie numai o delimitare față de punctul de vedere advers, ci și o îngustare — la urma urmelor o contrazicere — a propriilor premise: gîndul mare al unei *lingua characterica*, preluat de la Leibniz, nu este împins de Frege pînă la proiectul unei notații lămuritoare pentru număr, notație care ar suplini chiar definiția numărului. Inutil să adăugăm că această observație nu vizează decît implicațiile argumentației fregeene, așa cum ele s-au explicat mult mai tîrziu, în cursul *acestui* secol. Pentru un geniu ca Frege, faptul de a nu fi întrevăzut această cale a constituit un stimulent puternic în explorările sale pe cealaltă cale.

¹⁰⁷ Obiecția lui Frege pleacă, după opinia noastră, de la o neînțelegere: a face abstracție de natura diferențelor nu comandă cuprinderea lor simultană. Cu tot atîta drept s-ar putea replica: în definițiile ce vor urma ale numerelor naturale ca obiecte logice sau în analiza aserțiunilor numerice este de asemenea presupusă existența unor diferențe, căci în definiții sau explicări apar clauze (subformule) de tipul: $x \neq y$, $y \neq z$, $x \neq z$, ș.a.m.d. Atunci cînd utilizăm numerele, aceste „forme ale dife-

renței“ sînt gîndite implicit, căci o definiție — potrivit doctrinei fregeene — nu face decît să explicitizeze ceea ce era dinainte dat; dificultatea cuprinderii simultane a mai multor diferențe poate fi regăsită acolo unde ne-am aștepta mai puțin.

¹⁰⁸ Prin afirmația de aici, Frege precizează că propriul său demers este pur logic, nu epistemologic.

¹⁰⁹ Frege ia *à la lettre* caracterizarea lui Jevons a numărului ca „forma vidă a diferenței“, procedînd cu acrimonie matematică și fără cea mai mică indulgență filosofică. Desigur că „ $a \neq b$ “ își trădează inadvertența dacă o luăm ca presupusă definiție a numărului doi. Însă atunci cînd afirmăm: „Pămîntul are doi poli“, noi mai afirmăm potrivit lui Frege: există un obiect *a* care este pol al Pămîntului, există un obiect *b* care este pol al Pămîntului și *a* este distinct de *b*. — Critica fregeană vizează însă în mod îndreptățit imprecizia sugestiei lui Jevons că numărul ar *abstrage* diferențele dintre obiectele unei colecții într-o formă pură a diferenței ca atare.

¹¹⁰ Într-adevăr, întrucît nu lucrurile sînt suportul numărului, acest suport trebuie căutat în altă parte; el va fi găsit în concept.

¹¹¹ „Caracterul vag“ al expresiilor menționate se datorează faptului de a nu fi determinate prin concept.

¹¹² În ipoteza că numărul este o mulțime de unități.

¹¹³ Din nou este pus în joc principiul contextualității semnificației. Totodată este presupusă aici echivalența celor două întrebări: „ce este numărul?“ și „ce semnificație are un numeral?“ Aplicarea originară a numărului constă, desigur, în numărarea unei colecții de obiecte. Frege nu se adresează însă direct actului numărării, ci indirect, prin intermediul acelei forme de judecată pe care o numește *Zahlangabe*, adică aserțiunea sau determinarea numerică („Zahlangabe“ se mai poate traduce prin „indicație numerică“).

¹¹⁴ Argument tipic fregean, izvorît din marile tradiții ale filosofiei germane; acolo unde logicianul nominalist ar fi fost pregătit să resoarbă conceptele în termeni, profesorul de matematici

de la Jena înțelege termenii ca vehicule ale conceptelor, ceea ce îi permite să stabilească rezultatul important de mai jos.

¹¹⁵ Acesta este primul rezultat fundamental de natură afirmativă pe care Frege îl stabilește cu privire la număr. După cascada infirmărilor de pînă acum, critica logico-filosofică va trece în construcție solidă. Dar caracterul polemic al argumentației lui Frege nu rămîne, în continuare, mai puțin manifest — dacă nu altfel, atunci cel puțin prin minuțiozitatea cu care sînt preîntîmpinate eventuale obiecții. În ceea ce privește formularea: *Die Zahlangabe enthält eine Aussage von einem Begriffe*, să amintim că termenul *Aussage*, pe care l-am tradus aici prin *enunț*, semnifică în genere *ce se spune despre* un posibil subiect al rostirii, dar astfel ajunge să însemne în germană pînă și *predicat*. Ar fi însă impropriu de a înțelege *Zahlangabe* ca o judecată de forma subiect-predicat, în care numărul este enunțat ca predicat al unui concept. Vom vedea mai jos deslușirile pe care le dă Frege. Într-o parafrază liberă, *dictum*-ul fregean s-ar limpezi astfel: atunci cînd dăm un număr spunem ceva despre un concept. Acceptînd acest principiu, racordul dintre aritmetică și logică, via număr-concept apare mult mai firesc decît introducînd *ex abrupto* doctrina logicistă. E de mirare cum logica filosofică nu a poposit mai stăruitor în preajma acestui principiu fregean, atît de prielnic speculației filosofice, ci, urmînd mersul ideilor în curgere matematică, a acceptat cu umilință faptul că matematica se reazemă pe o *teorie a mulțimilor*, nicidecum pe una a conceptelor. S-a întîmplat deci că repunerea în drepturi a conceptului a fost de scurtă durată; în mod fatal, este preferabil să vorbim direct despre clase sau colecții, încît determinarea numerică este înțeleasă ca enunțînd ceva despre o mulțime. Pe de altă parte, dificultățile fundamentale au împins tot către un mod de exprimare nominalist, astfel că vorbim despre termeni conceptuali și nu despre concepte.

¹¹⁶ Asupra expresiilor care sînt funcție de timp, Frege revine în „Ce este o funcție?” (în volumul de față, la p. 319). Problema logică legată de asemenea expresii este elucidată astăzi în semantica lumilor posibile. Exemplul propus de Frege îl putem trata, rămînînd în limitele semanticii fregeene, în două maniere deo-

sebițe. Sau spunem că „locuitor al Germaniei“ nu are semnificație decât dacă precizăm timpul, iar atunci expresia *indică în mod nedefinit* un concept; sau tratăm „locuitor al Germaniei“ ca expresie ce desemnează o relație, adică funcție avînd două argumente și luînd ca valoare adevăratul sau falsul, funcție din care, prin fixarea argumentului potrivit (în exemplul de față „prima secundă a anului 1883, ora Berlinului“) obținem o expresie pentru un concept propriu-zis, adică pentru o funcție de un argument, care ia valori de adevăr ca valori pentru diversele sale argumente (asupra distincției precise între concepte și relații, vezi în scrierea de față § 70, precum și „Funcție și concept“, *indeosebi* p. 267).

¹¹⁷ Relația de subordonare a conceptelor respective se exprimă în ceea ce logica tradițională numește propoziții universal-afirmative: „Orice corp este greu“, „Toate balenele sînt mamifere“. Relația de subordonare a conceptelor trebuie deosebită de relația logică a căderii obiectului sub concept. În logica predicatelor, ea își găsește expresia în ceea ce Russell numește implicație formală; formula $(x)(A(x) \rightarrow B(x))$ este o atare implicație.

¹¹⁸ Ceva obiectiv înseamnă aici, desigur, ceva preexistent și astfel independent de reprezentările și operațiile logice ale subiectului. „... După părerea mea — scrie Frege în altă parte — aducerea unui obiect sub un concept constituie numai recunoașterea unei relații care subzista anterior“ (*Rezension: Husserl, Philosophie der Arithmetik*; vezi *Kleine Schriften*, pp. 181—182). Deși aici este vorba de o relație logică diferită, nu încapе înăoi că aceași caracterizare rămîne valabilă.

¹¹⁹ Cu alte cuvinte, propoziția pare să trateze despre lucruri individuale, nu despre proprietăți generale ale lucrurilor individuale.

¹²⁰ Afirmația pare banală, însă Frege — cum se lămurește imediat mai jos — o interpretează în sensul că nu putem vorbi despre obiecte fără a folosi nume proprii. În felul acesta, el se delimitează de întreaga semantică tradițională.

¹²¹ Dezvoltîndu-și punctul de vedere în contextul polemicii cu Husserl, Frege aduce următoarea precizare: „Dacă l-am desemna

pe Hans prin «om» și la fel pe Kunz, atunci am comite într-adevăr eroarea desemnării unor lucruri distincte prin una și aceeași denumire. Din fericire, noi nu procedăm astfel. Atunci când îl numim om pe Hans spunem prin aceasta că Hans cade sub conceptul *Om*, însă nu scriem și nu spunem «om» în locul lui «Hans» ... Atunci când pe A îl numim B în sensul că îi conferim lui A numele propriu «B», putem, firește, să spunem întotdeauna «B» în loc de «A»; dar atunci nu mai putem da unui alt obiect același nume «B». De această confuzie se face vinovată expresia nefericită de «nume comun». Acest așa-zis nume comun — care ar trebui denumit mai curînd termen conceptual (*Begriffswort*) — nu privește în mod direct obiectele, ci semnifică un concept; sub acest concept cad, eventual, obiecte; dar el poate fi și vid, fără ca din acest motiv termenul conceptual să aibă mai puțin o semnificație. În § 47 din *Fundamentele aritmeticii* am prezentat încă de mult această concepție. Este într-adevăr clar că propoziția «Toți oamenii sînt muritori» nu este folosită de cineva cu referire la un anumit șef de trib Akpanya despre care poate că nici nu a auzit» (*Rezension: Husserl, ...*, în *op. cit.*, p. 188).

¹²² Din nou, o delimitare față de gnoseologia kantiană, în care a percepția este izvor subiectiv al cunoașterii și principiu unificator al materialului divers al reprezentărilor. Caracterizată de Kant ca „identitatea universală de sine în toate reprezentările posibile”, a percepția sintetică face din conștiința de sine garantul unității introduse în diversitatea elementelor cunoașterii. „Posibilitatea formei logice a oricărei cunoașteri — tot pentru Kant — se întemeiază necesar pe raportul cu această a percepție ca o facultate” (*Critica rațiunii pure*, ed. rom., 1969, pp. 158, 161). Lui Frege, un asemenea punct de vedere îi apare inacceptabil. Prin faptul că un concept este obiectiv — ceea ce înseamnă că îl descoperim, nu-l și creăm — el are de la bun început priză asupra obiectelor: el le „judecă”, reținînd în sîta sa extensiunea, obiectele cărora le revine, așadar cărora le aparține ca proprietate. Atunci când numărăm se presupune că am deosebit obiectele unei colecții ca aparținînd tocmai acestuia și deci ca satisfăcînd un anumit criteriu, care nu este neapărat acela al agregării într-un spațiu limitat, de exemplu în orizontul vizual al unui

ins; criteriul nu esie altul decît conceptul. Puterea de strîngere laolaltă a conceptului se întemeiază pe relația logică a căderii obiectelor sub concept.

¹²³ Spinoza este unul din pușinii filosofi la care Frege a putut găsi o anticipare a propriei sale concepții despre număr. Într-un manuscris rămas de la Frege și editat recent, găsim următoarea însemnare sarcastică: „Obstacolele cu care trebuie să lupte progresul general arată că autori ai timpului nostru — printre care pînă și istorici ai filosofiei, de exemplu K. Fischer (cf. *Fundamentele mele*, Introd.) — procedează ca și cum pe tărîmul acestor probleme omenirea ar fi dormit pînă astăzi și abia acum își freacă ochii înnegurați, cînd, de fapt, gînditori de valoare unanim recunoscută, cum este Spinoza, au exprimat încă de mult idei pregnante despre număr. Dar pe cine să-l intereseze ce spune Spinoza despre un lucru ca acesta, care e la mîntea copiilor?” („Über den Begriff der Zahl. I. Auseinandersetzung mit Biermann“, în *Nachgelassene Schriften*, p. 93).

¹²⁴ Spinoza, Scrisoarea către *Ludwig Meyer* din 20 aprilie 1663 și Scrisoarea către *Jarigh Jelles* din 2 iunie 1674.

¹²⁵ Conceptele se obțin mai întîi prin abstracție, proces semiotic caracterizat în altă parte de către Frege ca desprinderea din mai multe lucruri, distincte dar asemănătoare, a ceea ce au ele comun și ca desemnare a acestui element comun printr-un semn; dar mai putem forma concepte noi pe baza conceptelor aflate în prealabil la dispoziția noastră. Pentru aceasta pornim de la *notele* unor concepte date (asupra notelor și a distincției notă-proprietate, vezi § 53), combinîndu-le, de exemplu, prin intermediul unor particule logice ca „și“, „sau“, „nu“ ori prin alte procedee mai complicate. Importanța contribuției lui Frege la teoria conceptului este legată de faptul că marele logician german a întrevăzut posibilitatea ajungerii la concepte noi, „pornind de la note“, prin procedee diferite de simpla generalizare sau determinare descrise în logica tradițională. Frege era în măsură să efectueze acest adevărat salt constînd în a pune problema formării de noi concepte în toată generalitatea, întrucît conceptul a fost înțeles de el (i) ca ceea ce se spune despre obiect, predicat posibil (ii) ca desemnat de o expresie (oricît de lungă și compli-

cată) prin intermediul căreia enunțăm ceva despre obiect și (iii) ca *alcătuit* într-un fel de *notele* sale, așa cum un lucru este din părți, și nu așa cum un lucru este „alcătuit” din însușirile sale. Frege își dă seama că nu avem decît a combina corect din punct de vedere logic diferite expresii care desemnează concepte, spre a obține deja o expresie care va desemna și va defini un nou concept, în cazul cînd în genere expresia se va putea enunța cu sens despre un obiect. În mod analog se pot defini și *relații*, se pot combina expresii pentru concepte și relații în noi expresii care vor desemna concepte sau relații. Expresiile de la care se pornește desemnează *notele* noului concept, introdus printr-o expresie care îl definește nu neapărat prin „genul proxim și diferența specifică”. În partea a IV-a a *Fundamentelor aritmeticii* vom întîlni numeroase exemple în acest sens. Astfel, în § 79 se introduce „element al șirului de numere naturale terminat cu n ” ca expresie desemnînd — pentru un n fixat — un anumit concept definit prin intermediul relației de succesiune (sau al relației converse, de precedență); conceptul de număr finit este desemnat prin expresia „... este un număr finit” și definit (§ 83) prin intermediul conceptului desemnat de expresia „este un membru al șirului de numere naturale ce începe cu 0”.

¹²⁶ Conceptul de „cerc pătrat” constituie un exemplu; în matematică, demonstrațiile de existență revin la indicarea faptului că un obiect cade sub un anumit concept, un cuplu de obiecte satisface o relație dată ș.a.m.d.

¹²⁷ Aici este implicat faptul că o propoziție are sens dacă și numai dacă negația ei are de asemenea sens.

¹²⁸ Frege revine la observația făcută în § 47; a se vedea și notele 120, 121.

¹²⁹ Distincția logico-gramaticală între nume propriu și nume sau termen conceptual derivă din distincția fundamentală concept-obiect, enunțată în introducere cu titlul de principiu fundamental.

¹³⁰ Frege admite deci în logica sa conceptele individuale; acestea au fost admise, de asemenea, în logica tradițională. Un concept individual este un *nomen appellativum* ca oricare alt

concept. Distincției dintre conceptul individual și individul subsumat acestuia îi corespunde distincția dintre clasa cu un singur element și însuși elementul.

¹³¹ I. Angelelli găsește că aici avem „cea mai bună formulă utilizată în *Fundamentele aritmeticii* pentru a caracteriza concepte și obiecte (nume de concepte și nume de obiecte)”; este „criteriul «cel bun»” de distincție între concepte și obiecte, avînd ca presupunere subzistența unor entități care pot fi numai referenții relației logice fundamentale de cădere sub concept, entități ce sînt subiectele ultime ale predicției (I. Angelelli, *op. cit.*, p. 157).

¹³² În germană, cuvîntul „Mond” desemnează nu numai satelitul natural al planetei noastre — semnat de asemenea prin „Erdmond” —, ci și conceptul de „satelit”. Dezambiguizarea expresiei se produce în contextul de utilizare. În limba română, — spre a da un exemplu oarecum înrudit — „soare” este întrebuințat ca nume propriu, însă admite și pluralul „sori”, acesta din urmă funcționînd în calitate de termen conceptual, sinonim cu „astru”.

¹³³ Trăsătură pe care nu o mai întîlnim în limba română.

¹³⁴ Încheierea secțiunii 52 deschide către unul din cele mai dense fragmente ale *Fundamentelor*, în care geniul logicianului își găsește o expresie desăvîrșită. Problema în discuție va fi conceptul ca *subiect* al enunțării.

¹³⁵ Distincția notă-proprietate este introdusă de Frege în scopul depășirii unei dificultăți de care se ciocneau o seamă de teorii anterioare asupra numărului. Acestea priveau numărul ca notă a unui concept; de fapt însă, numărul revine conceptului ca (obiect derivat dintr-o) proprietate a acestuia. Teoria tradițională a predicției privea nota ca proprietate a conceptului, omițînd distincția. Or, deosebirea formală dintre relația de subordonare între concepte și relația de cădere a unui obiect sub un concept impunea și noua distincție. Dacă A este subordonat lui B — și deci $(x) (A(x) \rightarrow B(x))$ are loc — atunci B este o notă a lui A , relația fiind între concepte de același ordin; dacă a cade sub A , relația este între un obiect și un concept (=o proprietate) și putem scrie în simbolismul logicii predicatelor: $A(a)$; dacă B este o

notă a lui A , și dacă $A(a)$, atunci $B(a)$; avem aici principiul pe care logica tradițională îl exprima prin *nota notae est nota rei ipsius* — formularea vădind tocmai confuzia între notă și proprietate. Ce se întâmplă însă dacă enunțăm o proprietate despre un concept ca *atare*? Atunci, arată Frege, enunțăm o relație *analogă* celei de cădere a unui obiect sub un concept (a se vedea și „Funcție și concept”; „Despre concept și obiect”, în volumul de față); așadar, în timp ce *nota* exprimă o relație între concepte de același ordin, *proprietatea* este legată de o relație între entități de pe planuri diferite: fie relația obiect-concept, fie relația concept de ordin unu — concept de ordin superior. Distincția fregeană este astfel asociată unei ierarhizări a entităților și a expresiilor — o prototeorie a tipurilor, s-ar spune. Când vorbim despre proprietatea unui concept nu vorbim și despre proprietatea obiectelor care cad sub acel concept. Dar *cum* se enunță o proprietate despre un concept? Și poate fi conceptul însuși subiect al predicăției? Luat ca subiect al predicăției, conceptul nu se va transforma în obiect, estompându-se astfel o distincție fundamentală? Frege a reluat analiza acestor probleme în articolele citate mai sus.

¹³⁶ Notînd conceptul menționat prin $P()$, propoziției îi corespunde formula $\neg(x)P(x)$; propoziția nu are forma subiect-predicat. Negarea existenței, ca de altfel și existența, nu capătă expresie în propoziții singulare sau universale (în sensul logicii tradiționale). Conceptul existenței și cel al non-existenței se exprimă prin cuantor și negație; ele realizează o „predicație implicită”, nu directă (cf. I. Angelelli, *op. cit.*, p. 181, unde se vorbește despre predicația implicită de ordin superior).

¹³⁷ A se vedea secțiunea 75. Nu trebuie uitat că deși numărul exprimă o proprietate a conceptului, el nu este enunțat ca un concept, ci atribuit (aplicat: *beigelegt*) conceptului de ordin inferior.

¹³⁸ Frege pune astfel în conexiune ontologia cu numărul, clarificînd prin analiză logică unele speculații metafizice ale tradiției filosofice.

¹³⁹ Iată una din aplicațiile de mare renume ale analizei logice într-un domeniu în care s-au exersat minți din cele mai subtile,

de la Anselm din Canterbury, autorul faimosului argument ontologic pînă la acel Anselm redivivus care este Descartes, împotriva căruia se ridică energic Kant. O comparație între Frege și Kant (a se vedea capitolul Despre imposibilitatea unei dovezi ontologice a existenței lui Dumnezeu din *Critica rațiunii pure*) ar evidenția convergența concluziilor și a unei părți a argumentației. Frege a concentrat ca într-o rază laser esența argumentației lui Kant împotriva pretenției dovezi carteziene: existența nu este un concept al lucrurilor. Definit ca ființă atotperfectă, în a cărei esență este inclusă și existența, Dumnezeu este un simplu concept. Nu rezultă însă din definiție proprietatea existenței unei ființe supreme, așa cum din definițiile matematice rezultă de atâtea ori numeroase proprietăți? Nicidecum, întrucît — arată Frege — conceptele se *compun* din notele lor, așa cum o casă se compune din materialele din care este construită, iar definiția construiește un concept din notele, nu din proprietățile lui, așa cum noi am zidi o casă din materialele componente și nu din proprietățile casei. Existența fiind o proprietate a conceptului, nu poate decurge *imediat* din definiția conceptului; la fel și unicitatea. Cu aceasta, problema dovezii ontologice este clarificată. Un corolar al concepției lui Frege este că existența nu poate fi atribuită obiectelor; este, de exemplu, deopotrivă lipsit de sens să spunem că Iulius Caesar există sau nu există (vezi „Despre concept și obiect“, în acest volum, p. 299). Pornind de aici, neopozitivismul a proclamat moartea ontologiei, decretînd problema existenței ca lipsită de sens și tributară unei tradiții perimate. Însă extrapolarea este abuzivă. Rămînînd la aspectele pur logice ale chestiunii (fiindcă raportarea omului la ființa lumii prin limbaj nu se rezumă la elaborarea categorială a „existenței“ ca predicat), se poate observa, de pildă, că „X există“ poate căpăta un sens, dacă o parafrazăm fie prin „numele propriu «X» are o semnificație în domeniul obiectelor reale“, fie prin „ $\exists y(y=X)$ “, fie în alte moduri, în funcție de contextul folosirii. Dacă limba păcătuiește nu o dată împotriva gramaticii logice, se întîmplă și ca gramatica logică să preschimbe limitările ei momentane în interdicții impuse discursului filosofic.

¹⁴⁰ De exemplu, conceptul de a fi „identic cu zero“, prin înșăși definiția sa implică admiterea unui obiect subsumat —

acesta este însuși zero — și numai unul: existența și unicitatea sînt așadar proprietăți ale conceptului amintit (a se vedea § 77). Dar unicitatea și existența nu sînt *note* ale aceluiași concept și nu intră în definiția lui; în caz contrar, am fi fost obligați la aserțiuni ca „orice obiect identic cu zero există”, „orice obiect identic cu zero este unul și numai unul”, aserțiuni al căror nonsens a fost în prealabil arătat.

¹¹¹ Acest concept este desemnat printr-o expresie predicativă de genul „este concept singular”. Conceptul „Satelit al pămîntului” este într-adevăr un concept singular (sub el cade un singur obiect), spre deosebire de însuși satelitul Pămîntului.

¹¹² Frege introduce aici o distincție importantă pe care în „Funcție și concept” o va generaliza pentru cazul funcțiilor în genere (inclusiv relații); totodată, în loc de *ordin* (Ordnung) al funcției el va folosi mai tîrziu expresia *treaptă* (Stufe). Unii exegeți văd aici o adevărată teorie a tipurilor *în nuce*, alții se arată mai rezervați fiindcă, pe de o parte, Frege nu sugerează nicăieri că ierarhizarea poate continua indefinit, pentru ordine (trepte) oricît de înalte, iar pe de altă parte, obiectele nu sînt la rîndul lor ierarhizate. Observăm, de asemenea, că ierarhizarea entităților nu este însoțită în prezentarea de față de o ierarhizare a expresiilor care le desemnează.

¹¹³ Primele trei părți ale *Fundamentelor* sînt tot atîtea etape preparatorii care conduc către *Culminatio*: definirea pur logică a numărului cardinal (Anzahl).

^{113a} Frege nu introduce simboluri pentru a formaliza aserțiunile sale. Dar logica predicatelor ne stă la dispoziție în acest sens; Frege ar fi putut extinde cu ușurință notațiile din *Begriffsschrift* în vederea unei expunerii strict formale, însă reacția alergică a publicului de filosofi și chiar de logisticieni la sistemul său de notații l-a îndemnat să recurga la enunțuri formalizabile, însă nu actual formalizate. Astăzi, revirimentul produs în reacția publicului față de logica simbolică convoacă în mod conformist în direcția opusă: a da gîndului expresie simbolică, ori de cîte ori claritatea intrinsecă a ideografiei nu obligă la lungirea disproporționată a frazei simbolice în comparație cu aceea din limbajul cuvintelor. Încercînd să formalizăm definițiile fregeene

avem la dispoziție două procedee. Putem trata numărul drept predicat de predicate, adică drept concept de ordin doi; aserțiunea numerică de forma „numărul n revine conceptului F ” s-ar exprima atunci printr-o formulă a logicii predicatelor de ordin doi, în genul $n(F)$, subînțelegându-se că n este o variabilă avînd ca valori predicate care pot lua ca argumente predicate de o variabilă individuală. În particular, pentru n putem substitui 1, 2, 3, ... Dar Frege precizează că numărul este obiect, nu concept, iar aserțiunea numerică are caracterul formaî al identității (§ 57); în consecință, într-o tratare mai apropiată de aceea fregeană, vom nota prin $N[F]$ *numărul care revine conceptului F* , unde N , un functor de un singur argument, este aplicat la concepte spre a produce numerele care revin respectivelor concepte. Potrivit acestor stipulări, vom formaliza în cele două variante enunțul din alineatul 2 al § 55 (fără a apela la simbolismul fregean), după cum urmează:

$0(F) \leftrightarrow (a) \sim F(a)$, respectiv $N[F] = 0 \leftrightarrow (a) \sim F(a)$. Am notat prin F un concept despre care se admite că i-ar reveni numărul zero și am presupus că prin „atunci” din formularea lui Frege este subînțeles „atunci și numai atunci”, pentru care am folosit semnul echivalenței \leftrightarrow .

¹⁴⁴ Formulele corespunzătoare sînt:

$$1(F) \leftrightarrow \sim (a) \sim F(a) \ \& \ (F(a) \ \& \ F(b) \rightarrow a = b)$$

respectiv

$$N[F] = 1 \leftrightarrow (\sim (a) \sim F(a) \ \& \ (F(a) \ \& \ F(b) \rightarrow a = b))$$

În continuare vom folosi numai ultima manieră de notație, transcriind de exemplu „numărul care revine lui F este n ” prin formula: $N[F] = n$. De asemenea, vom economisi parantezele, scriind de cele mai multe ori, de exemplu, Fa în locul lui $F(a)$.

$$^{145} N[F] = (n + 1) \leftrightarrow (\exists a)(Fa \ \& \ N[F(b) \ \& \ b \neq a] = n).$$

¹⁴⁶ Cu alte cuvinte, explicațiile de pînă acum ne ajută să *traducem* o aserțiune numerică într-o frază al cărei sens este deplin lămurit, însă înțelesul unei sintagme izolate din fraza tradusă, și anume „numărul care revine conceptului F ” și la fel înțelesul subsintagmei „număr” ne rămîn necunoscute ca înainte. Știm că numărul unui concept este un obiect, dar nu sîntem încă în posesia unui criteriu de identificare pentru obiectele specifice

care sînt numerele. Acel criteriu ni-l va da abia *definiția* expresiei „numărul care revine conceptului F “. Deocamdată, a fost definită numai expresia „numărul care revine conceptului F este n “. Definiția îmbracă o formă inductiv-matematică, altfel spus recursivă: au fost definite mai întii frazele $N[F]=0$, $N[F]=1$ și ni s-a indicat un procedeu general prin care înaintăm de la definiția unei identități de forma $N[F]=n$ la aceea de forma $N[F]=n+1$. Se observă cu ușurință că trecerea de la definiția unei determinări numerice la definiția numărului însuși este analogă unui proces al gândirii spontane. Înțelesul unei aserțiuni numerice este considerabil mai accesibil decît înțelesul unei expresii numerice; învățăm să numărăm jucîndu-ne dar putem muri savanți fără să ne fi întrebat măcar ce sînt și ce va să zică — was sind und was sollen — numerele. Ne este de ajuns să putem opera după reguli de calcul și să putem aplica numerele ca să avem sentimentul familiarității cu numerele. Adevărul propozițiilor matematice odată certificat, iluzia că sîntem în posesia deplină a *sensului* lor și că deci știm cumva ce este și numărul ne poate învălui de-a lungul întregii vieți ca acel vâl al iluziei, Maya, despre care vorbește tradiția indiană. Din acest somn ne trezește demersul fundamentist. Dar la punctul unde am ajuns acum grație lui Frege se trezește un prilej de adîncă mirare: cum este cu puțință ca înțelesul unei fraze să fie clar înainte ca înțelesul tuturor părților componente să fi fost în prealabil elucidat? Or, traducerea (sau explicația) unei determinări numerice de forma $N[F]$ în limbaj logic pare să nu lase dubii în această privință, după cum ne conduce aici și sentimentul nostru că întrebarea operațională: ce număr revine conceptului F ? (formulată eventual într-o modalitate laică, de pildă: „cîte mere sînt în grămada de față?“) este considerabil mai simplă decît întrebarea: „ce însemnă însuși acel număr, oricare ar fi el, despre care spui că este numărul merelor din grămada de față?“. O asemenea uimire se naște însă în preajma lingvisticii și logicii tradiționale cu mentalitatea lor atomistă, potrivit căreia înțelegerea întregului este condiționată în sens unic de înțelegerea părților alcătuitoare. Sîntem conduși acum la o semantică holistă, pe care Frege ne obligă s-o gîndim prin intermediul principiului contextualității. Intuind mai profund *fenomenul* lingvistic (și logic):

judecata trece înaintea conceptului, propoziția înaintea cuvîntului izolat. Dar intuițiile noastre o dată modificate într-un punct vor determina schimbări și în alte puncte ale cîmpului. În mod deosebit va trebui să admitem (întrucîtva *adversus* Frege!) că există *trepte* de înțelegere implicită (dacă se poate spune așa); avem un ghem de posibilități explicative care se poate desfășura într-o tramă explicitatoare a sensului expresiilor incumbate. Sau nu cumva lucrurile stau exact invers? Nu cumva expresiile numerice nu au un sens decît în contextul judecării? Dar faptul că numerele vor fi în cele din urmă definite nu lasă nici o îndoială că principiul contextualității nu are — așa cum am mai spus —, acest sens excesiv, mai curînd russellian decît fregean.

¹⁴⁷ Subiectul real al enunțării nu este întotdeauna desemnat de subiectul gramatical al propoziției (în cazul de față „numărul 0”); și tocmai de aceea distincția subiect-predicat își pierde în ochii lui Frege rolul fundamental de care s-a bucurat în logica tradițională.

¹⁴⁸ Enunțarea, ceea ce se spune despre subiectul real al propoziției, exprimă o proprietate a acestuia; Frege pare să presupună că proprietățile nu sînt și nu se prezintă ca entități independente, spre deosebire de obiecte. Tema este adîncită de Frege în „Despre concept și obiect”, prin introducerea distincției între expresii și entități saturate, respectiv nesaturate.

¹⁴⁹ Frege a susținut că în diverse contexte „este” exprimă relații deosebite; cuvîntul poate să trimită fie la relația de cădere a unui obiect sub un concept, fie la relația de subordonare a unui concept față de altul, fie la aceea de identitate, respectiv poate să figureze în cadrul unei propoziții singulare, a uneia universal-affirmative sau a uneia de identitate. În consecință, un simbolism logic corect trebuie să introducă notații distincte pentru cele trei relații semnificate de omonimicul „este”. În cazul de față, avem o propoziție de formă pe care am convenit s-o notăm (cf. nota 144) printr-o formulă de genul $N[F]=n$; F va fi deci „satelit al lui Iupiter” iar n va lua valoarea 4. Textul de referință în problema lui „este” în logica simbolică rămîne, desigur, *Tractatus logico-philosophicus*, 3.323: „În limba de toate zilele se întîmplă adesea ca unul și același cuvînt să desemneze în moduri cu totul

diferite — și să aparțină, așadar, unor simboluri diferite — sau ca două cuvinte care desemnează în moduri diferite să fie la prima vedere folosite în același mod în cadrul propoziției. Cuvântul «este» apare astfel ca semn al egalității și ca expresie a existenței; «a exista» — ca verb intransitiv, asemenea verbului «a merge»; «identic» — ca adjectiv...». Observația este însă mai veche și, în orice caz, Frege se dovedește mai puțin econom în materie de explicații decât sibilinul Wittgenstein.

¹⁵⁰ Observația trimite imediat la distincția sens-semnificație de mai târziu; Frege o elaborează pornind tocmai de la forma identității în care prin desemnarea diferită a unuia și aceluiași obiect (aici: „Columb” și „descoperitorul Americii”) obținem o informație sintetică. A se vedea „Despre sens și semnificație”.

¹⁵¹ Am înlocuit *Aur*, corespondentul germanului „Gold” din textul tradus, prin *Fier*, cuvânt care, având patru litere, poate reda în limba română exemplul ales de Frege.

¹⁵² Am tradus *das Gewollte* prin „intenția”, prilej de a între-zări că §§ 58—60, unde Frege revine — nu pentru ultima oară — la deosebirea dintre reprezentare și gândire conțin o schiță de analiză *fenomenologică* (sau cumva antifenomenologică). Interesul lui Husserl pentru Frege devine explicabil, logicianul de la Jena practicând ocazional ceea ce anglo-saxonii numesc *Philosophy of mind*, fie și numai spre a anexa gândirii partea defrișabilă a luxuriantei activități psihice.

¹⁵³ A se reciti în Cuprins titlul secțiunii 60. Explicațiile lui Frege dezvoltă afirmația din *Introducere* după care principiul contextualității este comandat de critica aberației psihologiste. Este lesne de înțeles cum exegeții și-au putut forma pe baza acestui pasaj părerea că între cel ce a scris *Fundamentele aritmeticii* și autorul lui „*Über Sinn und Bedeutung*” se cascadează o falie, semantica fregeană atestând că și pentru expresiile izolate de contextul propozițional am putea găsi o semnificație. Chestiunea a mai fost discutată în nota 17. Aici să mai adăugăm trei observații. Mai întâi, principiul contextualității semnificației este cu deosebire apt de a sluji în matematică, sau în genere oriunde întâlnim judecăți cu termeni nu observaționali, ci teoretici, termeni adică „pentru care nu găsim o imagine interioară corespunzătoare”. Semnificația unui termen este atunci dependentă nu numai de contextul judecăților, ci într-un grad și mai

înalt dependentă de întregul sistem al conceptelor și judecăților din teoria de referință; iar în afara judecății unele părți componente ale ei nu desemnează în mod independent nimic, funcția lor fiind aceea de auxiliari indispensabili. Exemplul dat de Frege în subsolul alineatului următor, ca și considerațiile sale dintr-un articol de mai târziu (1891, deci în preajma lui „Sinn und Bedeutung!“) *Despre legea inerției* — acolo Frege spune, în spirit holist, că numai totalitatea postulatelor mecanicii se raportează la experiență — atestă că o asemenea interpretare nu modernizează excesiv gândul lui Frege. Dar există și un al doilea aspect: cuvântul *semnificație* (Bedeutung) mai păstrează în *Fundamentele aritmeticii* un uz fluctuant; Frege se luptă împotriva identității *Bedeutung* = *Vorstellung*, iar ca argument în lupta sa împotriva psihologismului face observația *fenomenologică* după care *dacă* înțelegem să asociem judecăților reprezentări, și la fel cuvintelor, *atunci* reprezentarea asociată judecății nu este compusă din reprezentările asociate cuvintelor componente, pentru simplul motiv că nici măcar nu putem asocia fiecărui cuvânt al frazei o reprezentare izolată. Transpare așadar din explicațiile lui Frege asupra principiului său și o teorie holistă asupra amalgamării reprezentărilor izolate în cele globale. Însuși principiul contextualității spune însă și vrea altceva: să asigure obiectivitatea semnificațiilor, conținuturilor, smulgându-le din sfera reprezentărilor mentale. În al treilea rând, s-ar putea ca Frege să fi fost condus la principiul contextualității semnificației și de următoarea observație, pe care *expressis verbis* nu o întâlnim totuși nicăieri în opera sa: putem defini astfel înțelesul unei *Zahlangabe*, încît propoziția obținută să mai conțină cuvântul pentru concept, dar cuvântul care desemna numărul să pară a se fi volatilizat fără vreo urmă palpabilă. Traducerea conține așadar un termen conceptual dar în rest numai variabile și constante logice. Într-adevăr, am văzut (§ 57) că, de exemplu, aserțiunea $N[F] = 2$ se definește logic: $(\exists x)(\exists y)(Fx \& Fy \& x \neq y \& (z)(Fz \rightarrow z = x \vee z = y))$. Principiul contextualității comportă așadar următorul corolar: traducerea dintr-un limbaj în altul se petrece nu cuvânt cu cuvânt, ci frază cu frază. Un corolar înrudit este: definirea semnificației unei propoziții nu comandă definirea cuvintelor care compun propoziția. Aceste consecințe au fost exploatate de Russell și alți filosofi analiști în direcții cu totul nefregeene.

¹⁵⁴ Afirmatia poate fi înțeleasă în două feluri: sau că numeralul desemnează numai înăuntrul contextului propozițional, sau că ceea ce desemnează numeralul nu se află în afara contextului propozițional. Prima interpretare este mai plauzibilă. Dar primul

alineat al § 61 va preciza totodată: numerele nu sînt nici înăuntrul, nici în afară în sens spațial, nu acceptă determinarea locului.

¹⁵⁵ *Objective Gegenstand*: obiect care ne stă în față, obiect prezent.

¹⁵⁶ Obiectivitatea, de-a lungul întregului pasaj, este asociată însușirii de a fi același pentru toți: obiectivitatea în sens slab. Să însemne aceasta că Frege stă sub pecetea lui Kant, cum vor recenta unii exegeți? Se uită faptul că Frege a recunoscut în termeni fără echivoc existența obiectelor reale, independente de conștiința umană, independente de reprezentare. Obiectivitatea numărului cea lipsită de realitate nu se rezumă însă nici ea la firea numărului ca unul pentru toți; contextul global pare dimpotrivă să ateste că a fi unul și același este numai un criteriu (de recunoaștere) al obiectivității înțelese ca independență față de conștiința umană. În genere, existența nu poate fi separată. În matematică cel puțin, de adevăr. Adevărul obiectiv al teoremeleor matematice nu rezidă pentru Frege în faptul că ele sînt recunoscute ca adevărate de toată lumea, universalul consens rămîne un derivat al adevărului obiectiv și astfel obiectele matematice sînt independente de gîndire și reprezentare (vezi § 62, începutul), deși realitatea lor este fantomatică. Dimpotrivă, ar trebui să frapeze în afirmațiile lui Frege atît distanțarea față de poziția platonice potrivit cu care numerele *au* realitate, cît mai ales față de Kant: obiectele pot fi date gîndirii, fără a fi date în reprezentare ori intuiție, spațiul și timpul nu sînt cadrul a priori în care avem experiența posibilă a numărului. Noțiunea fregeană de obiect este radical distinctă de noțiunea kantiană (vezi § 89). Să recunoaștem totuși că problema existenței și adevărului în matematică ridică dificultăți considerabile, bănuite deja de Frege, dar amplificate considerabil în matematicile acestui secol. Toate aceste dificultăți provin într-un fel sau altul din insepabilitatea epistemologiei entităților matematice de ontologia lor.

¹⁵⁷ *Anzahl*: număr cardinal.

¹⁵⁸ Aici stă în ultimă instanță originalitatea întreagă a demersului fregean în comparație cu toți precursorii și cu contempo-

ranii lui, Cantor și Dedekind. Nimeni nu s-a adresat pînă la el propoziției numerice pentru a abstrage prin analiză pur logică numărul cardinal.

¹⁵⁰ Propozițiile de recunoaștere la care se referă aici Frege sînt propoziții de identitate, adică propoziții de forma „ $a=b$ ”; pentru orice semn „ a ” care desemnează un obiect, adică funcționează ca nume propriu, se cere să existe un criteriu spre a decide dacă „ $a=b$ ” este adevărată sau nu. Criteriul nu trebuie să fie „operațional”, el poate fi pur teoretic. Din explicațiile și exemplele furnizate aici și în secțiunile următoare (vezi în special precizarea ultimului alineat al § 63) rezultă că propozițiile de identitate care exprimă o recunoaștere nu sînt absolut arbitrare, ci trebuie să satisfacă și o condiție suplimentară, pe care Frege nu o formulează precis, — poate fiindcă prin natura ei comportă o imprecizie —, dar care ar putea fi descrisă eventual după cum urmează: „ $a=b$ ” este o judecată de recunoaștere dacă a și b sînt obiecte de *același gen*. De exemplu, a și b trebuie să fie amîndouă numere naturale, sau amîndouă direcții ale unor drepte, sau amîndouă greutăți ale unor corpuri etc. Condiția de mai sus poate fi întărită astfel: „ $a=b$ ” este o judecată de recunoaștere dacă „ a ” și „ b ” sînt nume proprii în cuprinsul cărora se semnifică *explicit* că entitățile desemnate sînt de același gen. O judecată de recunoaștere va avea atunci forma „ $N[F]=N[G]$ ” (pentru numere naturale), „direcția dreptei a =direcția dreptei b ” (pentru direcții), „greutatea corpului a este aceeași cu greutatea corpului b ” (pentru mase) ș.a.m.d. Dar însuși conceptul de *număr* (direcție, greutate etc.) va fi subînțeles, urmînd a fi definit pe altă cale. Va putea fi el abstras direct din criteriul de identitate a judecăților de recunoaștere pentru numere? Răspunsul ni-l vor da secțiunile următoare.

¹⁶⁰ David Hume, *A Treatise...*, 1. cap. III, § 1.

¹⁶¹ O primă trimitere la opera marelui Georg Cantor; confruntarea cu Cantor (a nu se confunda cu Moritz Cantor, citat în § 21) va continua în subcapitolul dedicat Numerelor infinite (§§ 84—86). A se vedea și nota 53. — Frege crede că numerele nu pot fi abstrase plecînd de la mulțimi de lucruri oarecare, fără apel la concept, adică spunînd pur și simplu: cînd două mulțimi pot fi

puse în corespondență biunivocă, ele au același număr, iar apoi definind succesiv numerele. În ultimă instanță, dar numai în ultimă instanță, demersurile lui Cantor și Frege sînt similare, însă... *non una est si duo dicunt idem!* Analiza logică a mecanismului de abstragere l-a condus pe Frege în alte direcții decît pe Cantor. După cum reiese și din referințele aduse, ideea lui Hume, adică punerea în joc a corespondenței biunivoce, fusese redescoperită și era pe punctul de a deveni un bun cîștigat al comunității matematice.

¹⁶² Vezi nota 159.

¹⁶³ Este vorba despre așa-numitele definiții prin abstracție, studiate pentru întîia oară de către Frege, ceea ce a dus la o înbogățire considerabilă a teoriei conceptului și a teoriei definiției. Pentru acest procedeu Frege nu are vreo denumire specială; termenul de „definiție prin abstracție” provine de la Peano (1894), Russell preluîndu-l și difuzîndu-l. Cantor, Frege, Dedekind, Russell au utilizat în mod independent acest procedeu în scopul definirii numărului cardinal.

¹⁶⁴ Primul semn, adică semnul relației de paralelism, are un conținut nespecific, general, legat de ceea ce am putea numi (în terminologie mai curînd booleeană decît fregeană) proprietățile ei formale, care sînt tocmai proprietățile unei relații de echivalență; dar același semn mai are un „conținut specific”, legat de natura relatorilor sau de ceea ce într-o terminologie iarăși nefregeană (împrumutată din tradiția filosofică) se numește genul relatorilor. În timp ce identitatea este o relație absolut generală, o relație de echivalență (adică: reflexivă, simetrică și tranzitivă) cum este aceea de paralelism mai are și un conținut specific. Dacă a și b sînt identice, atunci ele stau și în orice relație de echivalență definită pe un domeniu de obiecte căruiua îi aparțin a și b , dar reciproca nu este valabilă: dreptele paralele, de exemplu, nu sînt identice (adică indiscernabile) dar au ceva identic — direcția.

¹⁶⁵ În *Begriffsschrift*, Frege explicase deja posibilitatea obținerii unor concepte prin analiză logică a propozițiilor. Unul și același enunț poate fi analizat și descompus în mai multe feluri. Rămînînd deocamdată la ceea ce s-ar numi judecăți singulare și

judecăți de relație: putem izola în mai multe moduri subiectul real și predicatul real al enunțării. În exemplul adus de Frege mai sus, judecata „dreapta a este paralelă cu dreapta b ” poate fi înțeleasă ca o judecată care enunță o relație despre a și b ; acesta ar fi, probabil, „modul inițial” al scindării, la care face aluzie Frege — inițial, întrucît el ni se impune *prima facie*. Aceeași judecată poate fi înțeleasă și ca afirmînd că a are *proprietatea* de a fi paralelă cu dreapta b , sau că a cade sub conceptul desemnat de „paralel cu b ”. Totuși, cînd Frege vorbește despre obținerea unui „nou concept”, el se referă, după toate probabilitățile, la o transformare de un gen mai radical. „Paralel cu b ” înseamnă „avînd aceeași direcție ca b ”, de unde ajungem la „dreptele a și b au aceeași direcție”, adică „direcția lui a este identică cu direcția dreptei b ”. Mecanismul logic care permite aceste transformări va fi dezvăluit de Frege mai jos, la capătul unei analize minuțioase, care acoperă §§ 65—68.

¹⁶⁶ Deși (1) a și b sînt paralele între ele dacă și numai dacă (2) direcția lui a este identică cu direcția lui b — avem deci o echivalență logică — relația din (1) este din punct de vedere epistemic primară față de identitatea din (2). Frege argumentează, într-adevăr, că relația de paralelism ar fi mai intuitivă decît relația de identitate a direcțiilor. Acest argument epistemologic se poate generaliza dincolo de domeniul geometriei, observînd că echivalența sub un raport dat a două obiecte de același gen este cunoscută de regulă înaintea relației dintre clasele de echivalență astfel determinate, clase care sînt obiecte abstracte, entități la un nivel superior. De aici și caracterul așa-zicînd mai intuitiv al primei relații. În limbajul teoriei mulțimilor: o relație de echivalență R definită pe un domeniu nevid determină o partiție a domeniului în clase de echivalență conținînd, fiecare, toate elementele echivalente *modulo* R , clase nevide, două cîte două disjuncte și acoperind prin reuniunea lor domeniul; invers, fiind dată partiția unui domeniu, există o relație de echivalență răs-punzătoare de această partiție. Din punct de vedere gnoseologic, compararea obiectelor și echivalarea lor sub un criteriu dat constituie temeiul clasificării lor, deci este primară; în mod secund, dată fiind o anume clasificare, putem găsi întotdeauna o relație care o generează. Constatarea că două lucruri au aceeași cu-

loare premerge abstracției culorii; compararea lucrurilor sub raportul greutateii premerge abstracției greutateii. Schimbul de mărfuri *in actu* este condiție a abstracției valorii și — operațional — posesorii de mărfuri știu prea bine ce înseamnă că două mărfuri distincte au aceeași valoare, deși fetișismul mărfii îi împiedică să ajungă la abstracția valorii. Prioritatea gnoseologică are dealtfel și un pendant pur logic: pe baza unei relații de echivalență partiționarea este univocă, însă dându-se o partiție (mulțime-cît) putem ajunge la relații de echivalență intensional-distincte, deși avînd aceeași extensiune. Așa se explică, dealtfel, că Dedekind, Peano și Frege au putut ajunge la definiții deosebite, dar echivalente, ale numerelor cardinale: ei porneau de la relații de echivalență distincte însă echivalente între ele. Expunerea acestor considerații în stil matematic ar fi de bună seamă mai elegantă, totuși aici nu putem decît să trimitem la cursul de logică matematică și teoria mulțimilor.

¹⁶⁷ Definiția permite să înlocuim contexte de un tip determinat prin contexte de alt tip; ea nu determină „direcția unei drepte“, ci „identitatea direcțiilor“, adică sensul unei propoziții de recunoaștere. De remarcat că în formularea de mai sus *definiens*-ul este pus înaintea *definiendum*-ului, ceea ce, fără să încalce vreo regulă logică, se abate de la uzanțe.

¹⁶⁸ Doctrina logicistă presupune în mod esențial că identitatea este o relație logică și nu un concept matematic care vine să se adauge logicii; în timp ce un savant de talia lui Tarski, de exemplu, nu este singurul care consideră că divizarea termenilor în logici și extralogici este mai mult sau mai puțin arbitrară, logicistul se vede condamnat să includă semnul identității în rîndul constantelor logice, spre a fi în măsură să opereze reducția aritmeticii la logică. Legile identității vor fi deci pentru Frege legi logice eminemente analitice, *a priori*, iar semnul identității, '=' unul din simbolurile primitive ale sistemului formal construit în *Grundgesetze der Arithmetik*. Frege introduce, dealtfel, semnul identității încă în *Begriffsschrift*, dar acolo semnul are numai funcția de a exprima identitatea sensului unei expresii introduse prima oară cu sensul unei expresii date în prealabil.

¹⁶⁹ Acesta este faimosul *principium identitatis indiscernabilium*, pe care Frege și-l însușește ca definiție a identității obiectelor: „Sînt aceiași acei [termeni] care pot fi substituiți unul în locul celuilalt păstrînd adevărul [unui enunț oarecare]”. Pasajul din Leibniz continuă astfel: „Dacă avem A și B iar A intră într-o propoziție adevărată și substituția lui B pentru A oriunde acesta din urmă apare dă loc la o nouă propoziție care este de asemenea adevărată, și dacă aceasta se poate face pentru orice asemenea judecată, atunci A și B se spun a fi *aceiași*; reciproc, dacă A și B sînt *aceiași*, ei pot fi substituiți unul în locul celuilalt, așa cum am spus”. Exegeții moderni remarcă inacuratețea semantică a formulării, întrucît A și B sînt înțeleși cînd ca termeni, cînd ca obiectele referite prin intermediul termenilor; Frege, atît de scrupulos în alte contexte, omite prilejul de a denunța aici confuzia între *semn* și *semnificat*, respectiv între menționarea și utilizarea expresiilor. Să fie acesta efectul admirației sale necondiționate față de Leibniz? Fapt este că dacă principiul vizează identitatea obiectelor, formularea leibniziană se referă la expresii desemnînd obiecte: în propoziții substituim *numele* obiectelor, nu obiectele însele. Dar în perioada *Fundamentelor aritmeticii* Frege nu clarificase pe deplin răspunsul la întrebarea cu care debutează „Despre sens și semnificație”: ce este identitatea? O relație între obiecte, sau între semne? Principiul identității indiscernabilelor, desemnat uneori și ca „legea lui Leibniz”, se poate lămurii deci în două feluri, înlăturînd confuzia *use-mention*: 1) fie ca principiu conform căruia desemnările obiectelor identice sînt reciproc substituibile în orice context; sub această formă, principiul reglementează și așa-numita relație de denumire — *the name-relation* (vezi Rudolf Carnap, *Semnificație și necesitate*, p. 148); 2) fie ca principiu conform căruia $x=y$ dacă și numai dacă orice proprietate a unuia este proprietate a celuilalt. În prima sa formulare, principiul este (ori pare) contrazis în cazul contextelor neextensionale, înăuntrul cărora substituirea termenilor avînd aceeași semnificație însă sensuri diferite nu întotdeauna păstrează adevărul propoziției. Frege s-a străduit să salveze principiul, prin distincția între semnificații directe și indirecte.

¹⁷⁰ Am tradus „Gleichheit”, „gleich” cînd prin „egalitate”, „egal”, cînd prin „identitate”, „identic”. În mai multe ocazii Frege

a subliniat că egalitatea înseamnă întotdeauna tocmai identitate. Observațiile făcute de autorul *Fundamentelor aritmeticii* în alineatul pe care tocmai îl comentăm erau mai puțin oțioase în epoca respectivă: Frege era contemporan și cu matematicienii care, „mai în glumă mai în serios“ nu găseau nepotrivit să afirme că $1+1$ este egal cu 2 însă nu identic! Dacă această confuzie între sensul și semnificația lui „1-|-1“ și „2“, respectiv între semn și semnificație, este astăzi eradicată, meritul revine lui Frege în primul rând.

¹⁷¹ Autorul nu justifică totuși nicăieri această afirmație printr-o deducție formală. Dealtfel, el nici nu formalizează principiul lui Leibniz. — Privitor la modalitatea introducerii acestui principiu în *Fundamentele aritmeticii*, I. Angelelli ridică următoarele obiecții dure: „(1) Este *dogmatică* — «Leibniz dixit». Trebuie reamintit că într-un sens Leibniz era modelul lui Frege, așa cum se afirmă în Cuvîntul înainte la *Begriffsschrift*. (2) Este *incoerentă*: Frege propune o analiză a conceptului identității dar aceasta se reduce la adoptarea principiului lui Leibniz. (3) Este *falsă în ceea ce îl privește pe Leibniz*. Leibniz restrângea în mod *systematic* formula sa „eadem sunt...“. „El nu privea formula sa ca pe o lege universală plauzibilă, ale cărei excepții sînt enigme surprinzătoare descoperite cu surle și trîmbițe (așa cum s-a întîmplat în filosofia post-fregeană). Pe de altă parte, nu este limpede motivul pentru care Frege adoptă tocmai această formulare foarte tare a principiului lui Leibniz. (4) Este, de bună seamă, *incompatibilă cu propria semantică a lui Frege*“ (I. Angelelli, *op. cit.*, pp. 51—52).

¹⁷² Precizare importantă asupra principalului criteriu prin care descobim obiectele de concepte: conceptul este predicat virtual, obiectul poate fi subiect al unui „conținut judicabil singular“, sau, încă, o parte a predicatului acestuia din urmă. Caracterizarea conceptului ca predicat posibil este de obîrșie kantiană. Distincția concept-obiect va fi adincită în „Funcție și obiect“, „Despre concept și obiect“. Autorul trece aici cu dezinvoltură de la expresii la semnificații; căci dacă articolul hotărît se aplică numelor proprii, însușirea pe care o are direcția axei Pămîntului de a fi subiect real al unui conținut judicabil singular este diferită de

însușirea derivată de a fi subiect gramatical al propoziției în care se exprimă acest conținut judicabil și diferită de însușirea de a fi o parte a predicatului „identică cu direcția axei Pământului”. Să fim deci atenți: 1) prin „conținut judicabil singular” Frege nu înțelege propoziția singulară, ci gândul obiectiv exprimat într-o propoziție singulară; 2) prin „subiect”, are în vedere subiectul real, referința unui nume propriu; 3) prin „predicat”, are în vedere când expresia cu funcție de predicat, când conceptul desemnat de predicatul propoziției singulare. În pofida acestor corective, pasajul în ansamblul său este limpede și adinc.

¹⁷³ Considerațiile dezvoltate pînă aici pot fi privite și ca obiecții anticipate împotriva operaționalismului, care vrea ca obiectele abstracte (îndeosebi cele din științele fizice) și conceptele teoretice să prindă ființă pe baza unor operații de măsură. Operaționalismul nu este exact un mod particular al creaționismului definițional formalist criticat de Frege, dar are comun cu acesta încrederea în puterile genetice ale definițiilor.

¹⁷⁴ S-ar putea crede că Frege amalgamează aici două genuri de definiții: acelea pur abreviative, a căror menire este să condenseze expresii mai lungi în expresii concise — nu altul este cazul definițiilor din sistemele formale — și definițiile cu adevărat lămuritoare, care pe lîngă că „stipulează semnificația unui semn”, ca primele, mai spun și ceva despre această semnificație. Transformarea definiției într-o judecată în rînd cu altele înseamnă că definițiile de al doilea gen informează nu numai asupra (semnificației) SEMNULUI dar și asupra SEMNIFICAȚIEI (semnului). Definițiile pe care Frege le va da numerelor naturale 0, 1, 2, ... nu stipulează numai înțelesul unor semne, ci aduc informații noi, căci ele asociază unei semnificații cunoscute un sens încă necunoscut.

¹⁷⁵ Lectura întregii secțiuni trebuie racordată la distincția sens-semnificație, pe care în *fapt* Frege o deține deja, fără s-o numească și s-o dezvolte. În articolul său din 1892, Frege va spune că sensul unei expresii este modul în care este dată semnificația acesteia; analiza va porni atunci tot de la identități și propoziții identice. Definiția unui nume propriu este o propoziție de identitate; definiția este informativă în aceeași măsură ca orice ju-

decată — nu este o tautologie goală, o identitate de genul „ $a=a$ ” — întrucît *definiens*-ul, prin sensul său, dă într-un mod diferit semnificația *definiendum*-ului.

¹⁷⁶ Identitatea extensiunilor conceptelor menționate rezultă din faptul că relația de paralelism între dreptele a și b este o relație de echivalență.

¹⁷⁷ Relația de echinumericitate (*Gleichzahligkeit*) între concepte va fi analizată și definită pur logic în § 72. În construcția numărului cardinal, Cantor pornește de la o comparație analoagă între mulțimi, introducînd o relație pe care o numește „echivalență”. Bolzano dispunea deja de o asemenea relație, pusă în joc, dealtfel, încă de către Galilei atunci cînd acesta stabilea aparent paradoxala corespondență biunivocă între mulțimea numerelor naturale 1, 2, 3, 4... și mulțimea numerelor pare 2, 4, 6, 8...

¹⁷⁸ Încă nu am obținut definiția conceptului de „număr”, dar aceasta rezultă imediat (vezi finele § 72) din definiția pentru „numărul care revine unui concept”. De pe acum se întrevide ce este numărul cardinal: sfera unui concept definit pe baza relației de echinumericitate, concept înăuntrul căruia cad toate conceptele puse două cîte două în corespondență biunivocă după sfera lor.

¹⁷⁹ Prin „echinumeric cu conceptul F ” este desemnat un concept de ordinul doi, și anume proprietatea comună tuturor conceptelor față de care F stă în relația de corespondență biunivocă; or această proprietate este (sau poate fi) tocmai aceea de a avea „un număr de elemente”. Frege explică de ce nu ia însuși conceptul de ordin doi ca număr, ci ia mulțimea (de concepte) determinată prin acela din urmă. Primul punct al explicației sale nu necesită explicații suplimentare. Al doilea punct („conceptele pot avea extensiuni identice fără ca ele însele să coincidă”) face aluzie, probabil, la faptul că dacă $N[F]$ (numărul care revine lui F) este *conceptul* „echinumeric cu F ”, atunci dacă G este echinumeric cu F , ar urma că $N[G]$ este *conceptul* „echinumeric cu G ” și astfel, deși ar trebui să avem $N[F]=N[G]$, *qua* concepte cele două numere ar fi distincte. Dacă însă luăm sferele conceptelor „echinumeric cu F ”, „echinumeric

cu G în calitate de $N[F]$ și $N[G]$ atunci numerele coincid întrucât conceptele au aceeași sferă. — Ar fi interesant de știut ce vroia să spună Frege când pretinde „că ambele obiecții pot fi înlăturate”. Dar aici se pot face doar simple conjecturi. În practică, Frege lucrează cu sfere de concepte. În legătură cu preînțîmpinarea primei obiecții, s-ar putea remarca — alături de Benno Kerry, a cărui observație va fi acceptată în substanță de Frege, dar peste mai mulți ani — că atunci când vorbim despre *Conceptul X* (aici: *Conceptul* „echinumeric cu F ”) vorbim deja despre un obiect, nu mai puțin ca atunci când am vorbi despre extensiunea unui concept; a se vedea „Despre concept și obiect” în volumul de față. În legătură cu a doua obiecție, este pertinentă observația făcută de Frege în alte lucrări printre care și *Recenzia la Filosofia aritmeticii* a lui Husserl: Frege spune că deși relația de identitate este propriu-zis o relație definită numai pentru obiecte, conceptele avînd aceeași sferă se află într-o relație *similară*. Cu bunăvoință, afirmația s-ar putea interpreta ca permisiune de identificare absolută a conceptelor avînd aceeași sferă.

¹⁸⁰ Analiza logică oferă antidotul aceluia „element intuitiv” care se cere eliminat din fundațiile aritmeticii. Epistemologia fregeană a aritmeticii — în această etapă — este opusă celei kantiene prin circumspecția arătată față de intuiție.

¹⁸¹ Frege rezumă explicația dată în *Begriffsschrift*; importanța ei nu poate scăpa nimănui, în măsura în care se înțelege că logica predicatelor permite formalizarea relațiilor, rezolvînd astfel cu succes problema cea mai dificilă în fața căreia nu numai logica tradițională dar și algebra logică booleană eșuaseră. Aici, Frege lămurește cum degajăm dintr-un „conținut judicabil” elementele sale componente: concepte simple, concepte de relații. Analiza logică prin care ajungem la ele are caracterul unei descompletări, al ruperii unui întreg organic în părți recompozabile într-un conținut judicabil complet. Noutatea revoluționară a procedeului de formalizare impus de logica predicatelor nu este în nici un chip afișată, am spune mai degrabă că e camuflată. Frege are aerul de a recita o Sagă veche de cînd lumea și nu de a sparge tiparele tradiției.

¹⁸² Ni se spune explicit că logica pură este nu numai a conceptelor simple, ci și a celor relaționale. Logica studiază nu conținuturi particulare, ci forme; adevărurile logice sînt analitice și deci *a priori*.

¹⁸⁸ Această „formă generală” o vom simboliza prin „ φab ”; prin „ Fa ” va fi notat „ a cade sub conceptul F ” sau „ a este F ”.

¹⁸⁴ Așadar, relația binară φ include în domeniul ei sfera lui F iar în codomeniul ei sfera lui G dacă avem :

(a) $(Fa \rightarrow \exists b (Gb \ \& \ \varphi ab) \ \& \ (a)(Ga \rightarrow \exists b (Fb \ \& \ \varphi ba))$. Aici, a și b sînt utilizate în calitate de variabile individuale.

¹⁸⁵ În simboluri : $(a)(Fa \rightarrow (\exists b)(Gb \ \& \ \varphi ab))$.

¹⁸⁶ $(a) \sim (Fa \ \& \ (b) (Gb \rightarrow \sim \varphi ab))$. Formula este logic-echivalentă cu aceea de la nota precedentă.

¹⁸⁷ $\sim \exists a Fa \rightarrow (a)(Fa \rightarrow (\exists b) (Gb \ \& \ \varphi ab))$. Spre deosebire de formulele de la notele 185 și 186, aceasta este logic-adevărată, exprimă o lege logică. Validitatea formulei se întrevește cu ușurință ; într-adevăr, presupunînd că antecedentul ei, adică $\sim \exists a Fa$, are loc, atunci Fa nu are niciodată loc, iar atunci și consecventul formulei de la 187 (deci formula de la 185) are loc, ca implicație al cărei antecedent este întodeauna fals.

¹⁸⁸ $(b)(Gb \rightarrow \exists a (Fa \ \& \ \varphi ab))$. Formula este adevărată pentru orice G astfel încît $\sim \exists b Gb$.

¹⁸⁹ $(a) \sim (Ga \ \& \ (b) (Fb \rightarrow \sim \varphi ba))$.

¹⁹⁰ $(d)(a)(e) ((\varphi da \ \& \ \varphi de) \rightarrow a = e)$. Relațiile care prezintă proprietatea formală enunțată se spun a fi *multiunivoce* (*many-one*).

¹⁹¹ $(d)(b)(a) ((\varphi da \ \& \ \varphi ba) \rightarrow d = b)$. Spunem că este o relație *unimulti-vocă* (*one-many*). O relație care satisface ambele condiții se numește *biunivocă* (*one-one*). O relație *biunivocă* ce pune în corespondență obiectele subsumate unor concepte realizează o corespondență *biunivocă* între aceste obiecte.

¹⁹² Vom nota prin „ $Ech(F, G)$ ” expresia „ F și G sînt echinumerice” ; așadar $Ech(F, G)$ este o relație de ordinul doi (sau, cum spune Frege în altă parte, de treapta a doua), relație ale cărei argumente sînt concepte. Vom nota prin $Un_1(\varphi)$ faptul că o relație satisface condiția de multiunivocitate (vezi nota 190) și prin $Un_2(\varphi)$ faptul că o relație satisface condiția de unimulti-vocitate (nota 191). Mai departe, să prescurtăm prin „ $Cor_1(\varphi, F, G)$ ” faptul că relația φ corelează obiectele subsumate conceptelor F și G , adică satisface condițiile de la 185 și 188. Definiția lui Frege capătă atunci următoarea formă concisă :

$$Ech(F, G) \quad \text{d}f \quad \exists \varphi (Cor_1(\varphi, F, G) \ \& \ Un_1(\varphi) \ \& \ Un_2(\varphi)).$$

Deși formula aparține logicii predicatelor de ordin superior, ca definind o relație între entități aflate la un nivel superior indivizilor, *definiens*-ul nu este decît abrevierea unei formule din logica predicatelor de ordinul 1.

¹⁹³ Vezi § 69; pentru a formaliza definiția avem nevoie de o notație pentru clase (— sfere, extensiuni de concepte). Frege notează extensiunea conceptului cu ajutorul unui operator similar operatorului lambda din logica de astăzi (vezi „Funcție și concept”, în acest volum p. 252); extensiunile conceptelor F , G se pot nota deci prin $\lambda F(x)$, $\lambda G(y)$. Cu ajutorul notației, extensiunile le vom nota prin λxFx , λyGy , etc. (x , y sînt utilizate ca variabile individuale legate prin operatorul λ). Conceptul „echinumeric cu conceptul F ” este *abstras* din relația $Ech(H, F)$ prin intermediul procedurii descris de Frege în § 70: Vom considera F ca fixat și H ca variabil, adică pe acesta din urmă îl vom privi ca pe un ocupant provizoriu al locului deținut într-un „conținut judicabil” de forma „ $Ech(H, F)$ ”; așadar, „ $Ech(\sim, F)$ ” va fi o notație potrivită pentru acest concept, „ \sim ” marcînd locul liber, prin a cărui completare („umplere”) cu concepte de ordinul 1 se obțin propoziții adevărate sau false. Definiția lui Frege se prezintă acum sub forma:

$$^1 N[F] =_{df} \lambda H(Ech(H, F)).$$

În cadrul acestei formule F poate fi privit ca variabilă liberă luînd ca valori concepte, iar H este o variabilă de același gen, legată prin aplicarea λ -operatorului la formula $Ech(H, F)$. În locul lui H putem alege orice altă variabilă definită pe același domeniu, de ex. G , L , ... etc.

¹⁹⁴ Notînd prin $\mathfrak{N}(n)$ expresia „ n este un număr”, vom avea:

$$\mathfrak{N}(n) =_{df} (\exists F)(N[F] = n).$$

¹⁹⁵ Se va demonstra, prin urmare, validitatea formulei:

$$Ech(F, G) \rightarrow N[F] = N[G].$$

¹⁹⁶ $Ech(F, G) \rightarrow (\lambda H.Ech(H, F) = \lambda H.Ech(H, G)).$

¹⁹⁷ După ce formula de la nota 195 a fost echivalată, conform definiției pentru „numărul care revine unui concept”, cu formula de la 196, aceasta din urmă se dovedește echivalentă cu:

$$Ech(F, G) \rightarrow (H) [(Ech(H, F) \rightarrow Ech(H, G)) \& (Ech(H, G) \rightarrow Ech(H, F))].$$

Această formulă afirmă tocmai că în ipoteza $Ech(F, G)$ orice concept echinumeric cu F este un concept echinumeric cu G și reciproc; altfel spus, în ipoteza amintită, sferele conceptelor „echinumeric cu F ”, „echinumeric cu G ” sînt identice:

$$\lambda H. Ech(H, F) = \lambda H. Ech(H, G).$$

¹⁹⁸ În nota 192 s-a introdus definiția $\exists \varphi (Cor_1(\varphi, F, G) \& Un_1(\varphi) \& Un_2(\varphi))$ pentru $Ech(F, G)$; această definiție o vom abrevia, introducînd $Cor_{1-1}(\varphi, F, G) =_{df} Cor_1(\varphi, F, G) \& Un_1(\varphi) \& Un_2(\varphi)$. Cu alte cuvinte, am notat prin $Cor_{1-1}(\varphi, F, G)$ „relația φ pune în corespondență biunivocă obiectele care cad sub F cu cele de sub G ”. Avem: $Ech(F, G) \leftrightarrow (\exists \varphi) Cor_{1-1}(\varphi, F, G)$. Acum, Frege arată că „prima propoziție”, *id est* $Ech(F, G) \rightarrow$

$\rightarrow (\text{Ech}(H, F) \rightarrow \text{Ech}(H, G))$ (presupunînd că H este un concept oarecare), este echivalentă cu afirmația:

$$[(\exists \varphi) \text{Cor}_{1-1}(\varphi, F, G) \& (\exists \psi) \text{Cor}(\psi, H, F)] \rightarrow (\exists \chi) \text{Cor}_{1-1}(\chi, H, G).$$

¹⁹⁹ Fiind date relațiile φ și ψ care satisfac condițiile de a corela biunivoc conceptele F, G respectiv H, F se cere să determinăm o relație χ care să coreleze biunivoc conceptele H, G . Frege arată că ceea ce numim astăzi *produsul* relațiilor φ și ψ satisface condiția cerută. Produsul necomutativ al celor două relații, notat prin ψ/φ , se definește: $(\psi/\varphi)(c, b) = =_{df} (\exists a)(\psi ca \& \varphi ab)$, pentru orice c și b . Așadar, χ este aici ψ/φ . În teoria relațiilor (sau logica predicatelor) se demonstrează că produsul a două relații biunivoce este tot o relație biunivocă și că dacă mulțimea A este pusă în corespondență biunivocă cu B , iar la fel B cu C , atunci mulțimile A, C pot fi puse la rîndul lor în corespondență biunivocă.

²⁰⁰ Este vorba de propozițiile: $((\text{Ech}(F, G) \& \text{Ech}(H, G)) \rightarrow \text{Ech}(H, F))$ și $N[F] = N[G] \rightarrow \text{Ech}(F, G)$.

²⁰¹ Întrucît formula $(x = x)$ definește un concept, și anume unul sub care cade orice obiect, este într-adevăr o lege a identității că $(x)(x = x)$; negația formulei $x = x$, pe care o notăm prin $x \neq x$, definește un concept sub care nu cade nici un obiect, cu alte cuvinte avem ca lege a identității: $\sim (\exists x)(x \neq x)$. Aceasta justifică definiția: $0 =_{df} N[x \neq x]$.

²⁰² Observație fecundă, putînd da loc la diferite precizări și dezvoltări, în funcție de filosofia și aparatul logic cu care lucrăm. Pe baza logicii clasice, a logicii intuiționiste, a logicii modale și a diverselor teorii asupra descripțiilor și definițiilor, admiterea conceptelor sub care nu cade nici un obiect și (în particular) a conceptelor contradictorii găsește diferite explicații însă nici un contraargument decisiv. Frege pare a asimila aici conceptele sub care nu cade nimic cu conceptele care conțin o contradicție, aparență dezmințită de alte afirmații în sensul că demonstrația de necontradicție nu oferă *eo ipso* o demonstrație de existență.

²⁰³ Avem aici o expunere concisă a teoriei descripțiilor definite în varianta sa fregcană. Termenul „descripție” este propus de Russell, însă prima analiză în logică modernă a descripțiilor a fost inițiată de Frege. Russell va trasa o linie despărțitoare între nume proprii și descripții — primele avînd referință, nu și sens, ultimele avînd în mod primar sens și ajungînd, ca „simboluri incomplete”, să refere abia în contextul propozițiilor; Frege în schimb privește descripția individuală definită — „definiția unui obiect pe baza unui concept căruia i se subsumează” — tot ca pe un nume propriu. Expresia care prezintă trăsăturile formale ale

unei descripții definite (de ex., admite articolul hotărît, respinge articolul nehotărît și cuprinde în sine expresii conceptuale) „are un conținut”, *id est* un sens dacă și numai dacă conceptul prin care se introduce respectivul individ are proprietățile existenței și unicității. Limba obișnuită nu poate fi epurată de pseudodescripții — expresii pentru care nu se asigură existența și unicitatea semnificației —, însă Frege își pune problema de a asigura cel puțin sistemului formal al aritmeticii capacitatea de preîntîmpinare a pseudodescripțiilor (a se vedea pentru detalii *Grundgesetze der Arithmetik*, vol. I). Metodele de analiză semantică a expresiilor își găsesc expresie și motivare în diversitatea modalităților de înțelegere a descripțiilor definite. În consecință, asistăm acum la o adevărată explozie de teorii și metode care analizează descripțiile sub două aspecte: 1) semnificația și utilizarea descripțiilor în limbile naturale și în limbajele științifice neformalizate; 2) introducerea cu mai multă satisfacție a descripțiilor în sistemele formale. Printre analizele și metodele cele mai influente ne numără cele propuse de Russell, Hilbert și Bernays, Carnap, P. F. Strawson, Keith E. Donnellan, Kripke. Din vasta bibliografie dedicată descripțiilor deflute propunem cititorului să aleagă, pentru început, cap. X, secțiunea 2 (Teoria descripțiilor și varietatea desemnărilor) din *Dezvoltarea logicii* de W. și M. Kneale (ed. rom. vol. II, pp. 228—236) și cap. I, §§ 7, 8 (Descripțiile individuale. Metoda lui Frege pentru descripții) din *Semnificație și necesitate* de Rudolf Carnap (pp. 77—85). În logica tradițională, problema descripțiilor a fost de asemenea analizată; în *Logica de la Port Royal*, găsim, de exemplu, o fină analiză a „termenului singularului complex”, expresii prin care se înțelegeau tocmai ceea ce numim acum descripții (vezi Drăgan Stoianovici, „Definite Descriptions in Port-Royal Logic”, în „Rev. Roum. Sci. Sociales”, Philosophie et Logique, vol. 20, nr. 2, 1976, pp. 145—154).

²⁰¹ Astăzi obișnuim a spune (*apud* Church) că „*a* cade sub conceptul *F*” — adică „*F(a)*” — este o formă propozițională definind funcția propozițională însăși, *id est* conceptul *F*; forma conține o variabilă liberă și se transformă într-o propoziție adevărată sau falsă dacă în locul lui *a* substituim numele unui obiect. „Conținut judicabil” înseamnă pentru Frege: „gînd” a cărui valoare de adevăr o putem recunoaște, asertîndu-l în cazul cînd îl recu-

noaştem ca adevărat, întrebându-ne dacă este adevărat, asertînd negaţia sa în cazul cînd este recunoscut ca fals.

²⁰⁵ $(x \neq x)(a)$ înseamnă acelaşi lucru ca „ $a \neq a$ ”.

²⁰⁶ Pasajul suscită cîteva comentarii. 1) Întrucît în locul unui concept pur logic ca acela al non-identităţii putem lua orice concept de sferă vidă se creează impresia că definiţia logicistă a lui zero şi a şirului numerelor naturale conţine un element arbitrar: putem avea o definiţie a lui zero în termeni logici, dar de vreme ce mai putem avea alta prin intermediul unor concepte factuale, nu rezultă că natura analitică a matematicii este o posibilitate, nu o necesitate stringentă? Nu cumva însăşi distincţia analitic-sintetic îşi dovedeşte astfel precaritatea? În literatura filosofică, posibilitatea unor definiţii alternative (e drept, nu în termeni factuali, ci în termenii teoriei mulţimilor) a stîrnit deja oarecare impacienţă. Indubitabil, Frege întrevăzuse caracterul întrucîtva arbitrar al definiţiei numărului, fără să se arate alarmat de împrejurarea că orice definiţie conţine un element arbitrar; uneia şi aceleiaşi semnificaţii i se pot asocia sensuri diverse, dintre care definiţia are latitudinea să aleagă. Dar tulburătoare în cazul de faţă este nu posibilitatea unor definiţii alternative ale numărului, ci posibilitatea unor definiţii „factice”, în contrast cu definiţiile pur logice. Obiecţia poate fi însă parată, observînd că distincţia între concepte „logice” şi „factice” nu este atît de solidă în cazul conceptelor de sferă vidă; „munte de aur”, concept de sferă vidă, nu este un concept *logic*, dar s-ar părea că aceasta nu ne îndrituieşte să-l numim *factual*. 2) Asupra „definiţiei” identităţii la Leibniz, a se vedea nota 171; aici să adugăm că o formalizare posibilă a principiului substitutivităţii identicilor rezidă în axiomele identităţii, care sînt enunţuri de forma

$$(\mathbf{x})(\mathbf{y})(\mathbf{z}) (\mathbf{x} = \mathbf{y} \rightarrow (\mathbf{F}\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{F}\mathbf{y})) ;$$

Quine a emis teza că orice interpretare a cuantorilor presupune substitutivitatea identicilor. Teza lui Quine rămîne în continuare controversată; în jurul interpretărilor cuantorilor a avut loc de asemenea în ultimul deceniu o discuţie al cărei sfîrşit nu se întrevade în viitorul apropiat, întrucît afirmaţii în aparenţă incompatibile pot fi susţinute prin construirea unor sisteme logice în egală măsură coerente

²⁰⁷ $(F)(G) ((\sim \exists aFa \ \& \ \sim \exists aGa) \rightarrow \text{Ech} (F, G))$; formula exprimă prima parte a aserțiunii adnotate.

²⁰⁸ $(F)(\sim \exists aFa \leftrightarrow N[F] = 0)$.

²⁰⁹ Avem: $(\sim \exists aF'a \ \& \ \sim \exists aGa) \rightarrow (\exists \varphi)(\text{Cor}_{1-1}(\varphi, F, G)$. Vezi și notele 187, 188.

²¹⁰ Prescurtăm prin „ $S(n, m)$ ” expresia „ n succede imediat lui m în șirul numerelor naturale”. Avem următoarea definiție:

$$S(n, m) =_{df} (\exists F)(\exists x)(\exists G)(Fx \ \& \ N[F] = n \ \& \ (y)(Gy \leftrightarrow (Fy \ \& \ x \neq y)) \ \& \ N[G] = m).$$

Membrul drept al definiției este o formulă în care singurele variabile libere sînt n și m ; expresia definește, așadar, o relație diadicii, în speță $S(n, m)$.

²¹¹ Se va demonstra formula $(\exists x)S(x, 0)$.

²¹² Particularizăm F și G din definiția de la nota precedentă prin „ $x = 0$ ” și respectiv „ $(x = 0 \ \& \ x \neq 0)$ ”, iar pe m prin 0. Se observă că utilizăm în mod esențial pentru G un concept de sferă vidă, introdus printr-o expresie evident contradictorie. Avem: $N[G] = N[x = 0 \ \& \ x \neq 0]$

0 este particularizat prin 0. Avem, de asemenea, $S(n, 0)$. Pentru conceptul de a fi identic cu 0 sînt evidente atît existența cît și unicitatea obiectului care cade sub el. Acest obiect este numărul 0. Numărul conceptului sub care cade numărul zero și numai zero este 1. Definiția: $1 =_{df} N[x = 0]$ revine la a-l defini pe 1 ca succesor imediat și unic al lui 0.

²¹³ Frege identifică în acest context „faptul observat” cu „propoziția non-generală”, adică existențială. Afirmatia că nici un element subiectiv nu intră în definiția numărului rămîne desigur valabilă.

²¹⁴ Pasajul evidențiază pentru elementul obiectivist al concepției fregeene: condițiile cunoașterii nu sînt dătătoare de seamă pentru conținutul ei și, în orice caz, nu pot fi puse în vreo conexiune cu adevărul propoziției. Gîndirea nu creează prin activitatea sa adevărul.

²¹⁵ $S(a, 0) \rightarrow a = 1$.

²¹⁶ $(F)(N[F] = 1 \rightarrow \exists xFx)$.

²¹⁷ $(F)(x)(y)((N[F] = 1 \ \& \ Fx \ \& \ Fy) \rightarrow x = y)$.

²¹⁸ $(F)(x)(y)((Fx \ \& \ Fy \rightarrow x = y) \rightarrow (\exists zFz \rightarrow N[F] = 1))$.

²¹⁹ $\text{Un}_{1-1}(S)$ Vezi notele 190–192.

²²⁰ $(x)(x \neq 0 \rightarrow (\exists y)S(x, y))$.

²²¹ Se cere să se demonstreze $(n)(N(n) \rightarrow \exists mS(m, n))$.

²²² În *Begriffsschrift*, Frege a introdus noțiunea de *proprietate ereditară în cadrul unui șir*; este ceea ce în logica simbolică de astăzi numim proprietate ereditară în raport cu o relație dată. Spunem că *proprietatea F este ereditară în raport cu relația φ* — și vom scrie „Her(F, φ)” — dacă proprietatea în cauză este transmisibilă de la oricare membru întâi al relației la membrul doi corespunzător. În simboluri: $\text{Her}(F, \varphi) = \text{df} (x)(y)((F x \& \varphi xy) \rightarrow Fy)$. Frege vorbește despre „șiruri” (Reihen) generate prin „operații” (Verfahren) și nu „relații”, însă definiția proprietăților ereditare rămâne în esență aceea de mai sus. Mai departe, Frege definește în *Begriffsschrift* relația de succesiune în cadrul unui φ — șir. Notînd prin $S\varphi(y, x)$ „y succede în șirul φ lui x”, definiția dată de Frege revine la:

$$S\varphi(y, x) = \text{df} (a)(F(\varphi(x, a) \rightarrow Fa) \& \text{Her}(F, \varphi)) \rightarrow Fy).$$

Definiția spune că y este succesor al lui x în șirul generat de relația φ dacă y se bucură de orice proprietate ereditară relativ la φ de care se bucură și orice rezultat al aplicării relației (operației) φ la x. În terminologia russelliană, numim această relație $S\varphi$ *ancestral* al relației φ . Astfel, ancestralul relației de la tată la fiu este relația (de descendență) de la strămoș la urmaș: x este strămoș al lui y dacă *orice* proprietate ereditară (evident nu numai biologică, ci și logică) transmisă de x fiilor săi este o proprietate a lui y. Întrucît printre aceste proprietăți ereditare se numără și proprietatea de a *descinde din x*, valabilitatea afirmației este evidentă. Așadar, pentru orice relație φ , $S\varphi(y, x)$ are loc dacă și numai dacă aplicarea iterată de un număr oarecare de ori a relației φ , pornindu-se de la x, duce la y.

²²³ Relația φ determină o anumită ordonare a argumentelor pentru care relația are loc; proprietățile formale ale ordinii respective variază în funcție de natura relației, care poate fi multiunivocă (many-one), unimultivocă (one-many) ș.a.m.d.

²²⁴ Poziție materialistă; interpretarea pasajului nu comportă nici o ambiguitate. În chip vădit, materialismul istorico-naturalist al epocii nu rămîne fără ecou în gîndirea lui Frege.

²²⁵ Ar fi interesantă aici comparația între Frege și intuiționiști. Frege formulează în termeni de rezonanță intuiționistă („atenție”, „criteriu de decizie a unei probleme”) întrebări cărora le dă răspunsul „logicii clasice”. Este o solidaritate de esență între principiile logicii clasice, succint rezumate aici (cu acceptarea implicită a legii terțiului exclus ca lege universală, ce nu admite excepții) și poziția așa-zicînd platonică: adevărul etern, obiectiv, transtemporal, negrevat de presupuziții epistemologice, al legilor logicii și matematicii. În ultimul timp s-a vorbit mult

despre caracterul preponderent epistemologic și nu ontologic al filosofiei fregeene, însă unui exces riscă să i se răspundă prin altul de semn opus dacă trecem ușor peste postulatul evident acceptat de către logicianul de la Jena, și anume că nici un considerent de ordin epistemic — deci implicînd o referire la subiectul cognitiv — nu interferează cu conținutul obiectiv adevărat al propozițiilor logico-matematice.

²²⁶ Relația $S(n, m)$ este tranzitivă.

²²⁷ Cititorul întrevede cu ușurință forma de raționare la care se face aluzie: inducția matematică, cunoscută sub numele de inducție bernoullică (vezi *Begriffsschrift*, nota lui Frege). Jacob Bernoulli (1654—1705) era într-adevăr considerat pionierul acestei metode folosită în matematici pentru prima dată de către Pascal.

²²⁸ Notăm prin $\text{Seq}_n(m)$ forma propozițională „ m este un membru al șirului de numere naturale $0, 1, \dots, n$ ”; pentru $n=1, 2, \dots$ obținem de fiecare dată un alt concept. Fie un n determinat; Frege își propune că arate că există un m astfel încît acesta este cel mai mic număr care este succesor al lui n , și anume $m = N[\text{Seq}_n]$.

²²⁹ Se are în vedere aici inducția incompletă, în opoziție cu aceea matematică, numită și „completă”; ultima conduce la propoziții universale și certe, cum este tocmai propoziția a cărei demonstrație (inductivă) va fi schițată.

²³⁰ Notînd prin „ $S(n, m)$ ” forma propozițională „ n succede imediat lui m în șirul numerelor naturale” (a se vedea nota 210) constatăm că relația de succesiune în șirul numerelor naturale este ancestralul relației S , adică este S_q (vezi nota 222). Se caută demonstrația formulei: $S(N[\text{Seq}_n], n)$. Pentru aceasta — arată Frege — se va demonstra în primul rînd că dacă $S(a, d)$ și $S(N[\text{Seq}_a], d)$, atunci $S(N[\text{Seq}_a], a)$. În al doilea rînd, trebuie demonstrat că $S(N[\text{Seq}_0], 0)$.

²³¹ Procedeu demonstrativ utilizat de către Frege este, evident, inducția matematică. Principiul inducției matematice se exprimă în logica predicatelor de ordinul 1 prin schema: $(n)(F(0) \& F(n) \rightarrow F(n+1)) \rightarrow (n)F(n)$. În cadrul axiomatizării Peano a aritmeticii,

schema inducției matematice îmbrățișează o infinitate de axiome, obținute prin substituții de constante predicative în F . Considerată ca schemă de formule a logicii de ordinul 1, nu poate fi vorba de o validitate logică a principiului pe care această formulă îl exprimă. Analizată în continuare prin intermediul definițiilor amorsate de Frege, schema conduce la un principiu logic-valid, dar acesta este un principiu valid al logicii predicatelor de ordin superior. Principiul afirmă că o proprietate a lui 0 ereditară relativ la relația S este universală.

⁸³² Se cere demonstrația unei aserțiuni a cărei simbolizare nu decurge la fel de simplu ca mai sus. Anterior, de exemplu, spre a desemna conceptul „membru al șirului de numere naturale terminat cu a ”, am introdus notația „Seq _{a} ”, simplificând printr-un tacit abuz de limbaj o notație de genul lui „Seq _{a} ()”, în care *locul* argumentului ține de notația funcției. Frege susține că o notație corectă trebuie să respecte această condiție; pentru explicații detaliate, a se vedea „Funcție și concept”, „Despre concept și obiect”. Ne convingem prin încercări că o notație rezonabilă pentru conceptul „membru al șirului de numere naturale terminat cu a , dar nu identic cu a ” trebuie să respecte pretenția emisă de Frege în cazul când conceptul însuși devine argument al altui operator, cum este „N”. Vom scrie, de exemplu, „Seq _{a} (ξ) & ($\xi \neq a$)”, convenind, *apud* Frege, că ξ nu umple locul gol, ci doar îl reprezintă ca atare. Preferințele noastre se îndreaptă totuși spre notația-lambda, dat fiind că o expresie de genul „ λxFx ” poate fi utilizată atât pentru clase, cât și pentru predicate (respectiv, concepte și extensiunile lor). — În notația — lambda „ $a = N[\lambda x(\text{Seq}_a(x) \& (x \neq a))]$ ” ar simboliza propoziția logică de la începutul § 83.

⁸³³ Așadar, va trebui demonstrată validitatea universală a implicației: $S(a, d) \rightarrow \lambda x(\text{Seq}_a(x) \& (x \neq a)) = \lambda x(\text{Seq}_d(x))$.

⁸³⁴ Abreviind prin „Seq(x)” expresia „ x este un membru al șirului numerelor naturale terminat cu d ”, se cere demonstrată propoziția: $\sim \exists x(\text{Seq}_d(x) \& S(x, x))$.

⁸³⁵ Definirea numărului finit conduce implicit la numerele infinite despre care va fi vorba în subcapitolul următor. În esență, numărul infinit este un obiect x , astfel încât există un concept F și x este numărul lui F (adică sfera conceptului sub care cad toate conceptele echinumerice cu F) și totodată $S(x, x)$. Ultima proprietate se numește *reflexivitate*. Numerele cardinale finite sînt ireflexive, cele infinite însă reflexive. În limbajul teoriei mulțimilor, spunem că o mulțime este (de putere) infinită dacă poate fi pusă în corespondență biunivocă (fiind deci echinumerică) cu o parte proprie a sa. Aceasta este definiția infinitului

pe linia Galilei—Bolzano—Dedekind. În definirea infinitului și finitului se mai poate utiliza altă proprietate, și anume *inductivitatea*. Un număr cardinal îl numim inductiv dacă este zero sau se obține prin adăugare succesivă de unități plecând de la zero și construind pas cu pas succesorii săi, 1, 2, 3 ... Numerele cardinale finite sînt inductive; numerele infinite au așadar proprietatea non-inductivității. Principiul inducției matematice este aplicabil tocmai la numerele inductive, adică finite.

²³⁶ În încheierea acestui subcapitol în care am făcut apel adesea la limbajul formulelor se cer cîteva precizări: *Fundamentele aritmeticii* ocupă o poziție mediană în tripticul marilor cărți ale lui Gottlob Frege, încadrată fiind de *Scrierea conceptuală* și *Legile fundamentale ale aritmeticii*, cărți în care aplicarea limbajului specios al formulelor solicită toată perspicacitatea cititorului și satisface într-o măsură rareori egalată spiritul lui de acribie. Transcrierea aserțiunilor logico-aritmetice în notațiile originare se poate urmări în *Begriffsschrift* (vezi în special cap. III, Einiges aus einer Allgemeinen Reihenlehre) și în *Grundgesetze*, I (în special §§ 38—46). O vastă listă de lucrări din logica matematică și filosofia matematicii s-ar cere menționată în legătură cu ecourile și răsfrîngerile de care demersul de logicizare a aritmeticii a avut parte, de la Cantor, Husserl, Russell și pînă astăzi. Pentru transcrierea modernă a formulelor fregeene am consultat cîteva lucrări introductive în materie, printre care excelenta *Einführung in die symbolische Logik* a lui Rudolf Carnap (Springer-Verlag, dritte Auflage, 1968). Notațiile sînt uzuale, exceptînd cîteva modificări minore.

²³⁷ Frege vorbește despre numerele infinite introduse de Cantor ca despre obiecte familiare oricărui matematician, ceea ce poate surprinde, întrucît acceptarea lor — cum știm — a presupus o penibilă perioadă de acomodare a matematicianului obișnuit la un nou mod de a gîndi numărul ca abstras din compararea mulțimilor oarecare. Fără îndoială că Frege ajunsese la numărul infinit pe propria lui cale, independent de Cantor, tot așa cum în *Begriffsschrift* redescoperise vechea logică a stoicilor și acoperise pe cont propriu domeniul îmbrățișat de algebra logicii.

²³⁸ Ceea ce este numai formularea exactă a faptului că avem o infinitate de numere finite. Întrebarea adiacentă este dacă

orice număr infinit trebuie să revină unui concept sub care cad entități abstracte, de natură matematică, sau dacă putem găsi un concept îmbrățișînd numai entități concret-materiale și căruia îi revine un număr infinit.

²³⁹ În timp ce Cantor se vedea obligat să recurgă la speculații metafizice nebuloase — un întreg amalgam de considerații laic-filosofice și teologice! — pentru a asigura numerelor și mulțimilor infinite „dreptul la viață”, Frege rămîne pe terenul solid al logicii, cu încredințarea că infinitul nu necesită o intuiție sau reprezentare specială, ci numai o recunoaștere rațională.

²⁴⁰ Georg Cantor (1845—1918), unul din titanii matematicii, pe cît de contestatar pe atîta de contestat, a creat teoria mulțimilor, aritmetica numerelor transfinite, a pus piatra fundamentală la temelia topologiei și a adus contribuții marcante în algebră și teoria funcțiilor. S-a ocupat totodată de istoria matematicii și filosofia infinitului. Printre operele sale se numără *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten* (însurarea a șase memorii elaborate între anii 1879—1884, adică exact între anii în care apar *Begriffsschrift* și *Grundlagen der Arithmetik*!) și *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* (1895—1897). „Fundamentele unei teorii generale a varietăților” — la care se referă aici Frege — apăruse în broșură separată înainte de a intra, ca al cincilea memoriu, în prima din cărțile susmenționate. Fragmente substanțiale din opera lui Cantor sînt accesibile cititorului de limbă română în Oskar Becker, *Fundamentele matematicii*, Ed. Șt., 1968, pp. 308—346 și Jean Cavaillès, *Studii asupra teoriei mulțimilor*, Ed. Șt., 1969, pp. 145—208. — Opera lui Cantor a deschis matematicii porțile unui tărîm nou, infinitul actual: un paradis — după expresia lui Hilbert — din care matematicienii refuză a se mai lăsa izgoniți. Pe baza teoriei mulțimilor creată de Cantor s-a putut clădi întreaga matematică existentă, însă gravele dificultăți de ordin fundațional suscitade de teoria mulțimilor au deschis o etapă de criză fără precedent în fundamente; inaugurată de descoperirea paradoxelor, criza n-a putut fi soluționată integral nici prin axiomatizările succesive ale teoriei mulțimilor de către Zermelo-Frenkel, von Neumann, Hilbert-Bernays ș.a., și nici prin edificarea teoriei tipurilor. Astăzi știm că nu se poate da o demonstrație absolută de consistență pentru

teoria mulțimilor, că nu putem decide între axioma alegerii și negația ei, între ipoteza continuului și negația ei; asemenea rezultate negative, obținute de Gödel, Cohen ș.a., se înscriu ca tot atâtea dezmințiri ale promisiunii de paradis platonice al cunoașterii matematice, promisiune pe care părea s-o aducă cu sine teoria mulțimilor. În contrast cu statutul fundațional incomod al teoriei mulțimilor, aceasta oferă confort tehnic și asistență întregii matematici, transformând-o într-o știință a structurilor. Raportul dintre logică și teoria mulțimilor ridică întrebări a căror lămurire — în măsura în care poate fi vorba de așa ceva într-un domeniu prin excelență deschis — depășește acest cadru: este oare teoria mulțimilor varianta pur extensivistă a logicii de ordin superior, iar logica predicatelor combinată cu teoria tipurilor o complicație comprehensivistă a teoriei mulțimilor? Și, în definitiv, este logica de ordin superior logică propriu-zisă? Iar teoria mulțimilor este ea o teorie matematică bună? Vocile minoritare care au răspuns în sens negativ nu vin totuși de la periferia matematicii; e vorba despre un Brouwer, de pildă, când trecem în revistă evaluările care înscriu teoria clasică a mulțimilor la pasivul matematicii. Corespondența și divergențele dintre punctul de vedere logic și cel al teoriei mulțimilor sînt personificate de eșecul dialogului Frege—Cantor (cf. și Notița introductivă). Deși este schematică și pînă la urmă incorectă conceperea logicii și teoriei mulțimilor ca două limbaje în totul diferite care spun aceleași lucruri despre aceleași lucruri, reducerea aritmeticii la logică se dovedește echivalentă cu reducerea ei la teoria mulțimilor. Pe acest teren mai restrîns, echivalarea chestionată mai sus devine deci posibilă iar cititorul lui Frege, dacă este matematician, va înclina să spună că logicismul lui Frege era o primă încercare de a reduce numărul la mulțime, însă o încercare avînd forma inutil complicată, alambicată cu subtilități filosofice, de care ne putem prea bine dispensa. Nu se poate obiecta nimic acestui punct de vedere — în afară de faptul că uită de dragul matematicii interesul dezvoltării logicii ca știință de sine-stătătoare. Dar era acesta din urmă un interes fregean?

²⁴¹ Am simțit nevoia să traducem aici „Wirklichkeit“, adică „realitate“, prin „actualitate“; terminologia lui Frege manifestă o anumită inconsecvență, deoarece în § 26 se făcea o distincție

între *obiectiv* și *real* (das Wirkliche). Dacă ar fi rămas fidel acelei terminologii, Frege trebuia să spună că numerele infinite sînt obiective, fără a fi propriu-zis reale.

²¹² Cantor numește „Mächtigkeit” ceea ce Frege numește „Anzahl”.

²¹³ Am tradus ad-hoc „Folgen in einer Succession” prin „sucesiune în cadrul unei consecuții”, iar „Folgen in einer Reihe” prin „sucesiune într-un șir”.

²⁴⁴ Într-adevăr, din punct de vedere epistemologic Cantor pune în joc în mod esențial intuitivitatea construcțiilor matematice, în timp ce Frege invocă numai raționalitatea intrinsecă a conținutului.

²⁴⁵ În pofida unor observații terminologice minore, Frege înțelege însemnătatea rezultatelor cantoriene, solidarizîndu-se cu orientarea filosofică subiacentă. Singura divergență mai serioasă privește numărul ordinal. Cantor introduce pentru mulțimile transfinite neglijate de către Frege numărul respectiv ca tip de ordine (Ordnungstypus).

²⁴⁶ Ultimul capitol al cărții lui Frege nu este un simplu rezumat al analizei logico-filosofice, ci reluarea și adîncirea cîtorva teme, printre care definiția numărului întreg pozitiv și a celorlalte genuri de numere, critica teoriilor formale ș.a.

²⁴⁷ Frege se exprimă precaut, vorbind despre plauzibilitatea (probabilitatea: *Wahrscheinlichkeit*) și nu certitudinea tezei logice asupra naturii analitice a enunțurilor aritmetice. El se explică și în § 90. Pentru a certifica teza mai rămîneau să fie deduse pas cu pas legile aritmeticii, pe baza definițiilor instituite. Acestei sarcini, Frege i se dedică în *Grundgesetze der Arithmetik*. Pînă la urmă însă, din cauza inconsistenței sistemului, teza logicistă va deveni încă mai puțin plauzibilă.

²⁴⁸ Axiomatizarea logicii se substituie, potrivit acestui punct de vedere, axiomelor aritmeticii. În fapt, în capitolul anterior Frege a tradus deja ceea ce mai tîrziu vor fi axiomele lui Peano în enunțuri și definiții logic-valide.

²⁴⁹ Să se observe că Frege nu reifică obiecte abstracte ca numerele, după cum nu reifică suportul numerelor, conceptele deci;

un imperiu autonom al conceptelor este de negăsit la logicianul german. E drept că ulterior formulările sale (în „Der Gedanke”, de exemplu) capătă o coloratură platonice mai pronunțată, Frege vorbind tocmai despre a treia lume — a gândului. Dar și atunci accentuarea punctului de vedere realist nu ajunge la fantasmagoria unei lumi autonome, desprinsă de subiect și obiect. În pasajul la care am poposit, Frege spune pur și simplu: conceptele și numerele nu sînt obiecte concret-materiale în spațiu, așa cum nu sînt nici evenimente psihice temporale, reprezentări.

²⁵⁰ Motivație subtilă a tezei logiciste: conceptele — se sugerează — există și ele în judecăți, adică în stări de lucruri care pot fi gîndite și exprimate în limbaj. Nu mai avem a ne întreba unde există numerele, căci ele nu există independent de concept, dar conceptul nici el nu există decît în și prin judecată. Dar judecățile însele? Realismul conceptual al logicii tradiționale va fi fost el tradus de Frege într-un realism judicațional? Dar un realism care nu ajunge la hipostazierea judecăților, adică la constituirea lor într-o lume autonomă și primordială își onorează titulatura. Recunoaștem că există legi ale naturii, de exemplu, dar nu recunoaștem că aceste legi există în spațiu și timp în același mod în care există fenomenele în care se manifestă. Obiective fiind, legile nu sînt obiectuale ori fenomenale. Căci conceptul — cu o vorbă memorabilă a lui Frege — poate fi distins dintr-o combinație, dar nu poate fi rupt de acolo. Cazul judecății, al gândului, nu este în fond altul, căci lumea și limbajul sînt realități globale, ale căror elemente — stările de fapt — pot fi distinse dar nu autonomizate ontologic. Să ne oprim însă aici, întrucît Frege nu a sondat adîncimea judecății, joncțiunea pe care o operează gîndul, posibilul conținut de gîndire, între subiect și obiect. — Caracterizarea legilor aritmeticii ca „legi ale legilor naturii”, deci legi ale judecăților, este în tonul întregului logicism, și avem aici nu un simplu „mot d'esprit”, ci o cale de explorare a conexiunii aritmeticii cu experiența. Afirmția s-ar putea interpreta ca spunînd: analiza enunțurilor aritmeticii duce la enunțuri despre enunțuri, la predicate de predicate, adică la logica de ordin superior.

²⁵¹ Vezi *Critica rațiunii pure*, ed. rom., p. 49.

²⁵² *Op. cit.*, p. 52.

²⁵³ Pentru Frege, propozițiile analitice — în speță, propozițiile logicii — pot fi informative, căci ele extind cunoștințele noastre. Explicația provine dintr-un nou mod de a înțelege definiția conceptului. Imaginea propusă — dezvoltarea plantei din sămânță — sugerează înlocuirea unei viziuni mecaniciste asupra demonstrației și definiției prin alta organică, mai aptă să redea complexitatea demersului rațional.

²⁵⁴ *Estetica transcendențială* pornește de la o premisă evitată de Frege într-un spirit extrem raționalist, anume că „... orice gândire trebuie să se raporteze în cele din urmă, fie direct (*directe*), fie pe ocolite (*indirecte*), cu ajutorul unor anumite caractere, la intuiții, prin urmare, la noi, la sensibilitate, fiindcă altfel nici un obiect nu ne poate fi dat“ (*Critica rațiunii pure*, ed. rom., p. 65).

²⁵⁵ *Op. cit.*

²⁵⁶ Kant și Leibniz sînt filosofii cărora Frege le datorează cele mai fecunde înfruriri. Însă logicismul fregean înseamnă o întoarcere în planul filosofiei aritmeticii de la Kant la Leibniz.

²⁵⁷ De la analiza conceptelor și instituirea definițiilor sîntem trimiși către instituirea axiomelor și analiza demonstrațiilor. Este sugerată cerința reducerii demonstrațiilor la cîteva procedee elementare, fundamentale ca una din exigențele metodei axiomatice. Explicitarea logicii subiacente condiționează succesul demersului axiomatic.

²⁵⁸ Notînd prin „ φ ” relația care generează șirul respectiv, avem:
 $(U_{n1}(\varphi) \& S\varphi(m, x) \& S\varphi(y, x) \rightarrow (S\varphi(m, y) \vee y = m \vee S\varphi(y, m)))$.
 A se vedea notele 190, 192.

²⁵⁹ Acest unic mod de inferență este *modus ponens* sau regula de detașare: dacă atît o implicație cît și antecedentul acesteia sînt demonstrate, atunci și consecventul este demonstrat. În fapt, Frege folosește și regula de substituție, fără s-o mai includă în rîndul modurilor de inferență.

²⁶⁰ Într-un limbaj mai riguros întrebarea lui Hankel — după ce o decantăm, înlăturînd formulările kantiene — este dacă o construcție formală coerentă în genul unei totalități de numere

admite o interpretare, un model, așa cum numerele complexe, de exemplu, au putut fi interpretate de Gauss în planul geometric. Acest mod de a pune problema raportînd structura la interpretările posibile, datează în logică cel puțin de la Boole și este paralel cu evoluția algebrei abstracte. În lectura lui Frege problema capătă un sens diferit, mai apropiat de acela tradițional, derivat din epistemologia aristotelică. Se presimte deja dificultatea întîmpinată de Frege în a înțelege fecunditatea axiomaticii formale hilbertiene.

²⁶¹ Obiectivitatea numărului este reafirmată de către Frege într-un spirit care nu este idealist-obiectiv, întrucît nu postulează un domeniu existent autonom, în afara subiectului în același sens în care subzista lumea exterioară, nu este kantian, întrucît nu presupune intuiția și experiența posibilă, dar este raționalist și înțelege obiectivitatea în sensul gnoseologic de „același pentru toți”. Frege împrumută de la Kant ideea obiectivității ca validitate universală, însă la o analiză atentă constatăm că fuziunea raționalismului leibnizian cu acela kantian conferă sintezei fregeene calități pe care sursele nu le aveau, la fel cum un aliaj capătă proprietăți de negăsit la metalele componente. Numerele sînt aceleași pentru toți, din cauză că înseși purtătoarele numerelor, conceptele adică, sînt aceleași pentru toți; or, în raport cu obiectele despre care pot fi predicate, conceptele sînt — cum am văzut — *proprietăți* distinse ca atare, dar în fapt inseparabile de obiecte prin însuși modul lor propriu de a fi. Dar astfel, de la sensul secund al obiectivității am ajuns în preajma sensului prim, ontologic. Kantiană, teoria lui Frege asupra conceptului nu este decît în privința — irelevantă aici — a predicativității conceptului.

²⁶² Frege tinde să confunde problemele genetic-epistemologice cu aspectele psihologice ale cunoașterii umane — reacție la psihologismul logic, dar și la scientismul naturalist al epocii sale.

²⁶³ Problema necontradicției se pune la nivelul conceptelor, al propozițiilor și al sistemelor de axiome. Poziția lui Hankel pare să îmbrățișeze și cazul sistemelor axiomatice. Un sistem formal-axiomatic poate fi considerat ca definind un concept *sui-generis*, și anume conceptul sub care cad toate modelele care

satisfac sistemul. În măsura în care răspunsul lui Frege vizează numai conceptul, critica fregeană a teoriilor formale rămâne unilaterală. Dar câteva observații pătrunzătoare par să indice uneori depășirea cadrului conceptelor izolate, în favoarea conceptualității axiomatice, sistemice. O citire a textului schimbînd acolo unde este cazul „concept” prin „sistem formal” se dovedește în orice caz instructivă.

²⁶⁴ Reciproca presupune a demonstra că unui concept i se subsumează cel puțin un obiect în cazul cînd conceptul este necontradictoriu. Frege îl critică mai jos pe Hankel pentru această eroare. Comentînd întreaga secțiune se poate replica *adversus* Frege: dacă în locul conceptelor considerăm conceptele *sui-generis* definite prin sistemul formal al postulatelor, atunci reciproca este valabilă, căci un sistem necontradictoriu admite întotdeauna un model. A prelinde lui Frege sau Hankel claritate deplină în această privință ar fi un anacronism, deoarece lucrurile s-au clarificat abia pe baza teoriei modelelor (Hilbert, Skolem ș.a.). Introducerea numerelor negative în modul în care procedează Hankel (și întreaga tradiție matematică) face uz de existența unui model, garantată de presupusa necontradicție a sistemului de postulate ale operațiilor.

²⁶⁵ Totuși necontradicția înseamnă deja existență la nivelul sistemelor de axiome, și anume *existență a unui model*. Privitor la prima parte a criticii lui Frege — observația că undeva se poate strecura oricînd o contradicție: ironic și dramatic este faptul că însuși autorul sistemului axiomatizat din *Grundgesetze* nu va înțelege gravitatea obiecției, din ea decurgînd cerința unei demonstrații de necontradicție. Frege nu introducea noi numere, însă introducea alte entități imposibile: extensiunile unor concepte rău definite.

²⁶⁶ Teoriile formale ale numerelor negative, raționale, complexe și infinite sînt criticate de Frege pentru pretenția lor de a *postula implicit existența* unor domenii de entități prin descrierea proprietăților formale ale entităților respective. Frege este îndreptățit să critice aici absența demonstrației de necontradicție, fără care sistemul ipotetico-deductiv al postulatelor nu are acoperirea necesară introducerii legitime a entităților matematice vizate.

²⁶⁷ Exemplul cu Luna sună curios, dar argumentația este solidă. Presupoziția sa este că o funcție și un concept (de ordinul întâi) trebuie să fie *peste tot definite* (adică definite pe domeniul tuturor obiectelor). Admițind cerința de mai sus, exemplul nu mai este șocant. Dar presupoziția ca atare este discutabilă, ea suscitând dificultăți însemnate.

²⁶⁸ Un profan ar putea găsi, eventual, în toate aceste considerații anticiparea unui mod familiar fizicii de a interpreta, de a găsi referințe fizice semnelor matematice. Interpretarea semnului i ca interval temporal se asociază în mintea profanului — de ce nu? — cu axa imaginară a timpului în cadrul continuului spațio-temporal einsteinian. Apropierea este, de bună seamă, forțată în litera ei; căci la Frege e vorba de a interpreta entitățile matematice, în timp ce la Einstein, dimpotrivă, punctul de pornire este fenomenul fizic. Dar asemenea aprecieri, oricât de forțate ar fi, sînt utile cel puțin ca gimnastică a minții. — În altă ordine de idei, trebuie spus că Frege s-a dovedit ocazional și un epistemolog pătrunzător, așa cum relevă articolul său „Über das Trägheitsgesetz“ din 1891.

²⁶⁹ Amplificată, observația l-ar fi condus pe autor în situația de a se întreba asupra coerenței propriului său sistem formal, ctitorind astfel investigația metamatematică în ceea ce are ea mai specific.

²⁷⁰ Cunoscuta interpretare a numerelor complexe se datorează lui Gauss.

²⁷¹ Aceasta este întocmai dilema logicismului: sau introducem intuiția ca sursă de cunoaștere — atunci raționalismul riguros al lui Leibniz suferă o corecție severă și strămutarea logicismului pe alte vetre filosofice devine inevitabilă — sau operăm cu definiții ale conceptelor care însă nu garantează existența; cu definiții care sînt tot atîtea „dovezi ontologice“ sofistice ale existenței. Soluția lui Frege — așa cum acesta se explică mai jos — rezidă în a defini numerele ca obiecte, nu concepte (punînd astfel în joc unul din principiile directe enunțate în Introducere), în a disocia obiectul și definiția logică de reprezentarea asociată obiectului logic (intră atunci în joc un alt principiu

director); și în a utiliza definițiile prin abstracție, pornind de la judecăți de recogniție (aplicînd al treilea principiu fundamental).

²⁷² Aici, ținta criticii lui Frege nu este numai psihologismul, ci și sursa lui primă, doctrina kantiană a cunoașterii. Întrebarea este dacă logicismul nu dispune aici prea repede de un adversar redutabil. Mai multe disocieri se cer făcute: 1) disocierea între intuiția și reprezentarea obiectului: cînd cerem ca obiectul să fie dat în intuiție nu ridicăm pretenția fuziunii sale cu cîmpul subiectiv al reprezentărilor; 2) disocierea întru dat a actualului de potențial, disociere din care țîșnește tocmai ideea de construcție, mai precis de constructibilitate. Spre a vorbi despre $1000(100^{01000})$ — ca să luăm exemplul adus de Frege — intuiția nu are nevoie de prezentarea (sau reprezentarea) a tot atîtor obiecte, ci de posibilitatea unor construcții succesive care în cele din urmă conduc la obiectul respectiv. Intuiție și constructibilitate sînt asociate în gnoseologia kantiană, dacă nu în litera ei, cel puțin în plauzibila tîlmăcire contemporană, care constă în a asimila intuirea unor obiecte posibile de experiență cu actul de înțelegere a procesului de construcție. Intuiția devine deci un act intelectual care împărtășește cu aprehendarea sensibilă aparența nemijlocirii, însă — ca orice construcție — mai presupune o spațio-temporalitate abstractă, o structură logică izolabilă. Pozițiile care se opun nu sînt ireconciliabile decît de la un punct încolo; ele colaborează pe o porțiune a drumului cunoașterii matematice. Atunci deci cînd construcția logicistă a numărului natural își urmează cursul știut, conturînd prin structura ei definiția genetică a mulțimii numerelor naturale, filosofia kantiană a matematicii sau intuiționismul contemporan pot pretinde — și nu fără temei — că aici avem numai discursivizarea unei intuiții a cărei natură este discutabilă dar a cărei existență rămîne certă. Divergența se reaprinde dincolo de acest punct, fiindcă în timp ce una din abordări rămîne la infinitul potențial, cealaltă îl absoarbe în mulțimea actual infinită a entităților ca într-un dat, anterior cunoașterii matematice.

²⁷³ În „Über formale Theorien der Arithmetik“ (articol din 1885), Frege explică pe larg distincția dintre cele două accepții ale termenului „teorie formală“. El scrie: „Sub denumirea de

«teorie formală» voi considera aici două modalități de abordare, dintre care pe prima o accept, în timp ce pe cealaltă urmăresc s-o infirm. Prima susține că toate propozițiile aritmetice pot fi derivate pur logic numai din definiții iar ca atare ele și trebuie să fie derivate astfel...». A doua concepție care poate fi desemnată drept teorie formală „afirmă că semnele numerelor $1/2$, $1/3$, numărul π ș.a.m.d. sînt semne goale». Potrivit acestei concepții — explică Frege — numerele sînt înseși semnele. O variantă a „teoriei formale” de acest gen este afirmația după care „numerele există atunci cînd putem calcula cu ele” (în *Kleine Schriften*, 1967, pp. 103, 105, 110).

²⁷⁴ Profesiunea de credință a raționalismului consecvent este condensată aici într-un aforism care luat în sine parafrazează nu doar „o afirmație bine cunoscută” — cum spune Frege —, ci o întreagă declarație de intenții. Stă în natura demersului filosofic tendința de a-și depăși cadrul inițial, rîvnind atotcuprindere, adică nimic mai puțin decît absolutul. Așa și raționalismul: punctul de pornire este rațiunea care se înțelege pe sine ca excelentă, ca mijloc suveran al cunoașterii. Însă raționalismul tinde să transforme rațiunea în factor ontologic, convertind procesul prin care se ia pe sine ca obiect în miraj, prin care ia obiectul ca pe sinele său. A vedea în rațiune numai un mijloc de cunoaștere înseamnă a face din ea un accident care lasă neexplicat modul esențial de a fi (încă) necodificabil al rațiunii umane: lămuritate, spirit explorator, proiect, fantezie. Întrebarea rămîne totuși dacă raționalitatea indubitabilă a lumii — matematica ei, spre exemplu — o privim ca pe produsul rațiunii, expresia ei fenomenală, sau ca pe suportul ei. Răspunsul nu poate fi atît de simplu ca întrebarea dar el pornește în orice caz de la precizarea că raționalitatea subiacentă lumii fără om stă într-un început față de rațiune și față de construcțiile ei splendide într-un raport omolog celui în care stau undele lumii față de culorile omului și față de vîz ca produs al evoluției multi-etajate; raport *omolog* tocmai, căci omologia nu este analogie, rațiunea nu se mărginește a face oficiile unui mecanism traductor sofisticat al raționalității obiective; strădania sa este de a modela, de a *unelti*, orientînd *lucrarea lumii* după criterii dictate de praxis, semioză, comunicare. A înțelege deci maxima „obiectul

propriu al rațiunii este rațiunea“ ca derivînd din convingerea că „obiectul propriu al omului este omul“ înseamnă a face dreptate raționalismului, corectînd o inconsecvență născută din spirit rectiliniu. — Însă aceste observații ne abat de la gîndul lui Frege. Nu a stat în intenția lui să contureze o doctrină raționalistă globală, nici să hipostazieze rațiunea în maniera unui realism platonice; tot așa, nimic mai opus adevărului istoric decît imaginea unui doctinar reluînd în contul matematicii ontologia hegeliană. Enunțul lui Frege nu este de natură ontologică, ci epistemologică, așa cum lămurește el însuși în fraza imediat următoare. Sursa aforismului fregean — așa cum un șir de exegeți au ținut să precizeze, în deplin consens — este de găsit la Kant. Numai luîndu-se pe sine ca obiect — și anume ca obiect de critică — rațiunea pură ajunge să dea răspuns întrebărilor fundamentale ale lumii, răspuns constînd în bună parte în clarificarea sensului, importanței și locului lor, ca și în strămutarea lor de pe terenul ontologiei pe acela al epistemologiei, axiologiei ș.a.m.d. Analog, sugerează Frege, aritmetica este obiect al rațiunii. — Ca atare, aforismul rămîne un test al rădăcinilor raționaliste ale concepției lui Frege, fără să aducă un element cu adevărat nou față de precizările anterioare.

²⁷⁵ Distincția, de ordin logico-gramatical, era cunoscută în filosofia tradițională. Primul capitol al *Categoriilor* lui Aristotel introduce patru tipuri de entități după criteriile de a fi sau a nu fi într-un subiect și de a se putea enunța sau nu despre un subiect (vezi și Studiul introductiv, p. XLII). Numărul individual, fiind desemnat ca nume propriu și nu ca adjectiv, este un obiect abstract, un subiect de predicatie. Dificultățile legate de sistematizarea ontologică a entităților sînt considerabile, îndeosebi dacă nu recurgem la ierarhizarea entităților după tipuri, ceea ce — aproximativ — ar corespunde treptelor succesive de abstractizare. Frege a evitat aici angajarea în analize mai complicate, preferînd să rămînă pe terenul fecin al logicii, însă în „Funcție și obiect“ și „Despre concept și obiect“ el introduce distincția dintre entități saturate și nesaturate, pornind de la distincția similară în planul expresiilor; analiza sa logică reînnoadă astfel firul cu tradiția filosofică.

²⁷⁶ Am tradus „Gleichung” prin „egalitate” și „Gleichheit” prin „identitate”; „Gleichung” vizează de fapt *expresia* unei relații de egalitate, adică „ecuația”.

²⁷⁷ Frege va explica în scrierile ulterioare — începînd cu „Funcție și concept” — înțelesul intuitiv al expresiei „extensiune a conceptului” („sferă”) prin conceptul de „parcurs valoric” (*Werthverlauf*). Conceptele sub care cad exact aceleași obiecte au același parcurs valoric. — Afirmția lui Frege după care apelul la extensiunea conceptului nu are importanță decisivă poate fi interpretată în două feluri. În primul sens, am fi ispitiți să vorbim despre clase (mulțimi) oarecare, independent de concept, la modul lui Cantor; este totuși limpede că Frege găsea absolut inacceptabil apelul la clase fără concepte. De aceea, în al doilea sens, sîntem autorizați a presupune că Frege are în vedere apelul direct la concepte, așa cum specifică explicit în nota de la finele § 68. Pînă la urmă, Frege nu s-a putut dispensa de oficiul parcursurilor valorice, al extensiunilor de concepte. În *Grundgesetze der Arithmetik*, Frege postulează fără restricții — și cu consecința dezastruoasă a paradoxului russellian — că două funcții au aceleași parcursuri valorice dacă și numai dacă iau aceleași valori pentru aceleași argumente. Simplificarea aparatului formal prin adoptarea unui „limbaj extensional” — cum obișnuim a spune astăzi — nu înseamnă că primatul conceptului asupra extensiunii sale este abolit. Frege rămîne pînă la urmă, în planul intențiilor teoretice, un comprehensivist.

²⁷⁸ A se vedea nota 264.

²⁷⁹ Deznodămîntul tentativei îndrăznețe a lui Frege de a elucidă enigma numărului este — în ordinea spiritului — tragic: logicismul viza transcenderea unei limite care nu a cedat. Ținta finală nu a fost atinsă, însă mijloacele și-au afirmat dreptul la o viață autonomă. Frege personal a resimțit cu acuitate proporțiile înfrîngerii. Spre sfîrșitul vieții, el fixează cu luciditate situația, retransîndu-se pe noi poziții fundamentale. Rîndurile sale sînt epilogul cel mai potrivit la o lectură comprehensivă și detașată a *Fundamentelor aritmeticii*: „Sforțările mele de a aduce lumină în chestiunile legate de cuvîntul «număr», legate de numerele disparate și de simbolurile numerice par a se fi încheiat

printr-un eșec deplin. Și totuși, aceste eforturi nu au fost cu totul zadarnice. Tocmai prin acest eșec ele pot conduce la cunoaștere. Dificultățile suscitade de aceste investigații sînt nu odată subapreciate...". „... Cu cît am meditat mai mult... cu atît m-am convins mai mult cã aritmetica și geometria au crescut pe același fundament, și anume pe acela al geometriei, încît întreaga matematică este propriu-zis geometrie“ (*Nachgelassene Schriften*, pp. 285, 297). Sursa geometrică a cunoașterii — precizează Frege — colaborează cu sursa logică pentru a ne da matematica în unitatea ei (*ibid.*, pp. 298—299).

Astfel, după o călătorie de 40 de ani în deșert, proiectul de unificare a logicii cu aritmetica sub scepstrul analiticității se frînge sub propria sa povară, elementul sintetic *a priori* reapărînd în prim plan.

FUNCȚIE ȘI CONCEPT

NOTIȚĂ INTRODUCȚIVĂ

Avem în față unul din cele mai cuprinzătoare articole pe care le-a scris solitarul gânditor german. Urmărind cu atenție mișcările de idei ale vremii sale, lucrările contemporanilor săi în domeniul logicii și fundamentelor matematicii, Frege era, în 1891, puțin cunoscut; nevoia de a se face auzit îi apărea cu atât mai presantă cu cât primul volum al operei sale capitale *Grundgesetze der Arithmetik* se afla într-un stadiu avansat de pregătire și avea să apară peste doi ani. Șapte ani se scurseseră de la apariția *Fundamentelor aritmeticii*; primirea rece făcută acestei cărți era descurajatoare. În intervalul 1884—1890, Frege a publicat puțin: un articol „Cu privire la teorii formale ale aritmeticii”, o recenzie și un succint răspuns la recenzia făcută *Fundamentelor aritmeticii* de către G. Cantor. Începînd din 1891, activitatea sa publicistică cunoaște un ritm accelerat: în 1891 îi apar două articole („Cu privire la legea inerției” și „Funcție și concept”); în anul următor va publica „Sens și semnificație”, „Despre concept și obiect”, precum și o recenzie la o carte a lui Cantor.

Ca și alte articole ale lui Frege, cel de față a fost comunicat la o ședință a Societății pentru Medicină și Științele Naturii din Jena (la 9 ianuarie 1891). Asemenea comunicări se publicau, de obicei, în „Sitzungsberichte der Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft”, supliment la „Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft”. De această dată însă, Frege s-a decis să-și publice articolul într-o broșură separată. Opusculul (Jena, Hermann Pohle, 1891) era precedat de următorul Cuvînt înainte care lămurea intențiile autorului: „Prezint în ediție separată această comunicare cu speranța că ea își va găsi astfel cititori cărora, în „Lucrările Societății pentru Medicină și Științele Naturii”, ea le-ar fi rămas necunoscută. Așa cum am mai anunțat deja, am intenția să prezint în viitorul apropiat o expunere asupra modului în care formulez, în cadrul scrierii mele conceptuale definițiile fundamentale ale aritmeticii și asupra modului în care pe această

bază efectuez demonstrații numai prin intermediul simbolurilor mele. În acest scop, este important să mă pot baza pe această comunicare, spre a nu fi silit să mă lansez acolo în explicații pe care unii le-ar putea omite, crezînd că nu au legătură cu esența chestiunii, în timp ce alții, dimpotrivă, le-ar putea înțelege greșit. Comunicarea mea nu se adresează numai matematicianului, așa cum a impus locul în care a fost prezentată; în ce mă privește am încercat să mă exprim astfel încît să fiu înțeles de cît mai mulți, în măsura în care timpul aflat la dispoziție și obiectul o permiteau. Fie ca aceasta să suscite interesul pentru problemă în cercuri științifice mai largi, îndeosebi însă în rîndurile logicienilor“.

Bazele teoretice ale notației fregeene și implicit ale modalității logice de analiză a propozițiilor și demonstrațiilor matematice sînt deci acelea ce sînt puse în discuție aici. Ne amintim că în prima sa operă capitală, *Begriffsschrift* (1879), Frege redescoperă calculul propozițiilor și deschide apoi drumuri noi, inventînd ceea ce mai tîrziu se va numi „teoria cuantificării“, „logica predicatelor“ sau chiar (*vide* A. Church) „calcul funcțional“. Invenția acestui calcul pornea acolo de la observația că o expresie în genul unei propoziții singulare, avînd înțeles complet, constituind un întreg încheiat, poate fi privită ca obținută dintr-o altă expresie care conține una sau mai multe părți variabile și o parte constantă obținută tocmai prin înlocuirea părților variabile prin expresii corespunzătoare cu semnificație constantă (astăzi noi am spune: obținută prin înlocuirea părților variabile cu expresii aparținînd *categoriei semantice* corespunzătoare). Partea constantă a expresiei generatoare, Frege o numea *funcție*, partea ei variabilă, *argument*; expresia generată prin deplinarea expresiei-funcție cu o expresie-argument, expresia obținută fiind a unei valori. Limbajul formulelor — *scrierea conceptuală* inventată de Frege — se sprijinea pe acest mod de analiză pentru a simboliza expresiile limbajului obișnuit prin expresii ale aplicării unei funcții la argumentul (sau argumentele) ei. Totodată, în cazul unor propoziții cum ar fi „bioxidul de carbon este mai greu decît hidrogenul“ sau „Cato l-a ucis pe Cato“, se întrevad modalități diferite de a descompune expresia într-o parte constantă considerată ca funcție și în altele, privite

ca argumente ale respectivei funcții. Astfel, luând prima expresie, o putem construi aplicând argumentele „bioxid de carbon” și „hidrogen”, în această ordine, la funcția „este mai greu decât”, sau aplicând „bioxid de carbon” la funcția „este mai greu decât hidrogenul”, sau aplicând „hidrogenul” la „bioxidul de carbon este mai greu decât”. Gîndul complet, „conținutul judicabil” pe care îl exprimă propoziția, poate fi deci analizat în feluri diferite, dar mecanismul logic de articulare a ansamblului propozițional din părți componente va avea permanent trăsăturile unui proces de aplicare a unor funcții la argumente.

Fundamentele aritmeticii reamintesc (a se vedea îndeosebi §§ 66, 70) această modalitate de analiză a propozițiilor și de abstragere a conceptelor și relațiilor din contextul unor propoziții.

În „Funcție și concept”, Frege răspunde exigenței de aprofundare și sistematizare a ideilor fundamentale aflate la baza întregului demers logic-fundațional: *funcție, concept, obiect*.

Punctul de pornire al analizei lui Frege este limpezirea înțelesului noțiunii de funcție de un argument, așa cum o întâlnim în matematica obișnuită. După ce distinge cu claritate între semnul funcției și funcția însăși, logicianul german distinge cu egală claritate între semnul funcției propriu-zise și expresiile în care semnul funcției fuzionează cu semnul unei alte entități, numită argument al funcției, spre a da împreună o expresie care desemnează o nouă entitate, și anume valoarea funcției pentru respectivul argument. Facerea și desfacerea expresiilor în mediul lor lingvistic este pentru Frege locul privilegiat către care, dacă privim, reușim să vedem mai adînc. Ni se cere să *intuim* că expresia care desemnează o entitate în calitate de valoare a funcției pentru un argument dat și la fel expresia care face parte din prima și desemnează ceea ce matematicianul numește argument al funcției au amîndouă un caracter autonom, complet, de sine-stătător, în timp ce expresia care desemnează însăși funcția are un caracter incomplet, nesaturat, reclamă o întregire. Incompletitudinea sau nevoia de întregire se manifestă în faptul că expresia care desemnează o funcție nu conține în sine semnul argumentului, dar conține în sine locul gol, ne-completat, al semnului argumentului. Sesizînd aceste *distincții* am întrevăzut natura întrucîtva misterioasă a expresiilor care desem-

nează funcții. Structura semnelor funcționale este deci lacunară; lacuna nu este imediat observabilă întrucît în cadrul expresiilor matematice semnul funcției intervine de obicei în combinație cu semnul care desemnează un argument determinat sau indică în mod indefinit un argument oarecare. Astfel, „ $f(x)$ ” va desemna valoarea unei funcții $f()$ pentru argumentul ei x ; vorbind despre „funcția f ” și nu despre „funcția $f()$ ” păcătuim împotriva gramaticii logice, întrucît, corect utilizată, notația funcției trebuie să-și exprime caracterul originar de a conține înăuntrul ei locul argumentului. Pe de altă parte, să considerăm, de exemplu, o expresie ca „ 2.1^3+1 ”, expresie care desemnează valoarea luată pentru argumentul 1 de funcția pe care o notăm — nu pe deplin clar — prin „ $2.x^3+x$ ”, funcție notată însă corect printr-o expresie de genul „ $2.()^3+()$ ”; Frege ne cere să *intuim* că expresia „ 2.1^3+1 ”, care din punct de vedere logic este un nume propriu desemnînd un obiect, nu a fost obținută printr-un proces de *juxtapunere liniară* a semnului argumentului peste semnul funcției, ci printr-un proces de *umplere*, de *întregire* a locului gol al expresiei funcției cu un semn al argumentului. Invers, semnul funcției s-a obținut printr-un proces nu doar de desfacere — *analysis* — ci de golire, în așa fel încît golurile să ajungă manifeste. Iată ce ar fi să însemne caracterul nesaturat și incomplet al semnelor pentru funcții; or, acest caracter originar al expresiei spune ceva despre caracterul originar al însăși entității desemnate. Trebuie să admitem — conchide Frege — că funcțiile însele, aidoma expresiilor care le desemnează, nu sînt saturate, au o nevoie de întregire. Dimpotrivă, obiectele — iar valoarea unei funcții de treapta întii este tocmai un obiect — au caracterul autonom, complet, saturat al expresiilor care le semnifică.

Exegeții lui Frege găsesc că o asemenea concepție asupra funcției este obscură; logicienii de după Frege nu au mai urmat-o fidel, în litera și spiritul ei, abandonînd-o istoricilor. O asemenea înțelegere a naturii funcției conduce, dealtfel, la dificultăți, atunci cînd este combinată cu absolutizarea fregeană a distincției între funcție și obiect; articolul „Concept și obiect” cu care cititorul se va confrunta ceva mai încolo este edificator în această privință. Pe de altă parte, explicația fregeană a funcției își găsește un rival mai norocos în definiția perfect clară pe care teo-

ria mulțimilor o propune pentru aceeași noțiune. În matematica de astăzi, noțiunea de funcție (aplicație) admite o explicație precisă în termenii altor idei, primitive, cum este ideea de mulțime; Frege pornește, dimpotrivă, de la premisa că noțiunile *funcție* și *obiect* sînt ireductibile.

Din punct de vedere teoretic, înțelegerea fregeană a naturii funcției rămîne incitantă. În penumbra sugestiilor despre „nevoia de întregire” a funcției, a metaforelor lipsite de rigoare, un instinct filosofic puternic lucrează — rămîne de văzut cît de spornic! — pentru reabilitarea „plinului” și „golului” ca principii elementare antagonice, inseparabile, ale jocului logic. Să fie oare cu desăvîrșire exclusă eventualitatea unei depășiri constructive a naivității filosofice de acest ordin? Metafora nesaturării contrazice paradigma subînțeleasă a compunerii expresiilor mai complexe în părți care se opun exterior. Așezării una *linga* alta a pieselor mozaicului logic, intuiția lui Frege îi opune viziunea unei contopiri intime. Imaginea nesaturării, la care Frege revine într-o serie de articole ca la un leit motiv, ne determină să spunem, de asemenea imagistic, că *atomismului logic* care avea să se revendice — prin Russell și Wittgenstein — tot de la el, Frege i-a opus în principiu, cu anticipație, un anume *chimism logic*.

După ce a precizat natura funcțiilor matematice, Frege trece la expunerea propriei sale contribuții: generalizarea noțiunii de funcție astfel încît ea să-și găsească o aplicare esențială în logică.

Frege pornește de la analiza egalităților și inegalităților, ca structuri propoziționale elementare; egalitățile și inegalitățile sînt considerate, la rîndul lor, ca expresii complete, decompozabile în părți saturate și părți nesaturate, desemnînd obiecte, respectiv funcții. Mai departe, orice propoziție singulară este analizată în același mod; partea nesaturată a propoziției singulare desemnează o funcție, partea saturată un obiect. Analizei tradiționale, care descompunea propoziția singulară în subiect, predicat și copulă, Frege îi opune scindarea bipartită. Propoziția singulară exprimă aplicarea unei funcții la un argument, valoarea funcției fiind desemnată de propoziție. Argumentul funcției este un obiect; valoarea funcției este de asemenea un obiect și anume este valoarea de adevăr a propoziției. Funcția însăși este în acest caz conceptul: funcție de un argument, definită pentru orice obiect și

luind ca valoare pentru un argument una sau alta din valorile de adevăr.

Corelată cu noțiunea de funcție este noțiunea de obiect, indefinibilă și fundamentală: „este obiect tot ce nu este funcție”. Expresiile care desemnează obiecte sînt nume proprii.

Frege numea limbajul său „Begriffsschrift”, adică scriere conceptuală. Denumirea se justifică nu prin faptul că Frege ar merge de la concepte spre judecăți, căci în realitate Frege ajunge la concepte pornind de la datul primar al judecății; dar ea se justifică, printre altele, prin utilizarea esențială pe care Frege o găsește conceptului în logică. Particularizare a ideii de funcție în genere, conceptul, în accepția fregeană, este generalizat din nou în trei direcții: 1) *relațiile* sînt înțelese de asemenea ca funcții, ele se deosebesc de concepte prin faptul că sînt funcții de două (sau mai multe) argumente și sînt esențial similare conceptului, întrucît pot lua în calitate de valori numai două obiecte (logice), și anume valori de adevăr, iar în articularea gîndurilor (propozițiilor) relațiile (respectiv expresiile relaționale) joacă un rol analog conceptelor, fiind entități de asemenea nesaturate; 2) conceptele și relațiile se ierarhizează pe trepte, după natura argumentelor pe care le pot admite, iar relațiile dintre conceptele și relațiile aflate pe trepte diferite sînt *analoage* relației elementare dintre obiect și concept, obiecte și relații etc.; în ierarhia conceptelor și relațiilor poate fi întrevăzută *una* din ideile teoriei tipurilor, dar subzistă și esențiale deosebiri la care nu este cazul să ne oprim aici; 3) idei logice fundamentale cum sînt negația, identitatea, generalitatea, existența, implicația sînt concepte și relații, adică funcții luind ca valori tocmai valorile de adevăr.

Celelalte entități cu care are de a face logica sînt *obiecte*. Printre acestea, obiecte strict logice sînt Adevăratul și Falsul. Dar extensiunile conceptelor sînt de asemenea obiecte *sui-generis*: parcursuri valorice.

Prezentînd conceptele logicii, Frege utilizează totodată notația sa conceptuală și se referă, cel puțin în treacăt, la majoritatea ideilor directe ale logicii sale.

Unui asemenea tezaur de reflecții logice i se adaugă o motivație logicistă subînțeleasă. În logica de altădată era vorba despre

concepte și judecăți, despre subiecte și predicate. Distincția dintre subiect și predicat este însă împinsă de Frege pe un plan secund și clarificată în lumina distincției dintre concept și obiect, ea însăși o particularizare a distincției mai generale dintre funcție și obiect.

Ideea de *funcție* fusese împrumutată de la matematică; Frege o restituie matematicii, clarificată printr-un efort fundaționist, dar și cu ispita unei logicizări radicale: căci dacă obiectele și conceptele matematicii se puteau defini pe baza logicii, orice funcție, așa cum intervine ea în matematica pură, ar urma să fie în tratarea fregeană o funcție *stricto sensu* logică. Nu i-a fost dat însă acestui proiect să se valideze; el cade împreună cu întregul demers logicist.

Dar dacă matematica a dat logicii noțiunea de funcție, de unde vine aceea de obiect? Negreșit din filosofie, pe filieră logică, epistemologică și ontologică.

Așadar, la capătul unei duble lecturi a articolului lui Frege, înțeles mai întâi ca demers de clarificare a unor concepte matematice de bază și apoi ca demers logicist de matematizare a logicii dar și de logicizare a matematicii, a treia lectură a articolului se impune: de data aceasta, una filosofică. „Funcție și concept” poate fi înțeles ca amorsare a unui demers semantico-ontologic, prin care analiza expresiilor limbii împinge la analiza entităților. Dacă motivația semantică este făcută limpede de către Frege, consecințele formal-ontologice se cer deduse cu oarecare efort. De vreme ce expresiile se împart în saturate și nesaturate, ceea ce ele semnifică trebuie să poarte la rîndul lor acest caracter originar; se ajunge astfel la împărțirea fregeană a domeniului „obiectivului” în obiecte și funcții.

Demersul lui Frege a fost comparat cu cel aristotelic, de la începutul *Categoriilor*, unde clasificarea expresiilor împinge la o clasificare a realităților. Motivația formal-lingvistică a împărțirii entităților în obiecte și funcții clarifică unele aspecte, făcînd însă mai dificilă înțelegerea altora, conturînd posibilitatea apariției unor aporii exasperante. Distincția dintre obiect și funcție este absolutizată (a se vedea și articolul „Concept și obiect”), iar pe de altă parte *obiectele* sînt puse de către Frege pe același plan: obiecte concret-senzoriale, numere, parcursuri valorice ale func-

țiilor, în particular extensiunile conceptelor, gândurile, valorile de adevăr etc. aparțin, în ontologia lui Frege, unei aceleiași trepte de realitate, sînt în egală măsură obiecte. Nu este stabilită o ierarhie logică, ontologică sau epistemică a entităților-obiecte, ceea ce face ca însăși distincția celor două tipuri de entități: funcții și obiecte să apară, la o analiză mai fină, problematică. De exemplu, întrucît extensiunea unui concept de treapta întîi este un obiect, conceptul se poate predica despre propria lui extensiune; primatul subînțeleș al obiectului față de concept este contrazis de primatul conceptului față de propria lui extensiune. Cerînd ca un concept să fie peste tot definit pe domeniul universal al obiectelor, Frege agravează dificultatea.

Ontologia formală a lui Frege rămîne pe cît se pare, tributară unui realism hipostaziant, nedorit dar inevitabil, care refuză o ierarhizare a (gradelor de realitate a) obiectelor.

FUNCȚIE ȘI CONCEPT

Cu mai mult timp în urmă* am avut cînslea de a vorbi în fața acestei Societăți despre acel ansamblu de simboluri pe care l-am intitulat *Begriffsschrift*¹. Astăzi, aș vrea să arunc o lumină asupra problemei din alt punct de vedere și să comunic unele completări și concepții noi, a căror necesitate mi-a devenit clară ulterior. Nu poate fi vorba în cele de față de a expune integral scrierea mea conceptuală, ci numai de a clarifica anumite idei fundamentale.

Punctul meu de pornire este ceea ce în matematică se numește funcție. Semnificația inițială a acestui cuvînt nu era atît de largă ca aceea la care s-a ajuns mai tîrziu. Va fi oportun să începem cu tratarea acestei prime accepții și abia apoi să trecem în revistă extinderile ulterioare. Pentru început, mă voi referi numai la funcții de un singur argument. O expresie științifică apare pentru prima oară cu o semnificație limpede acolo unde ea este cerută de enunțarea unei legi. În cazul funcției, aceasta s-a întîmplat odată cu descoperirea analizei superioare². Acolo s-a pus pentru prima oară problema de a stabili legi valabile pentru funcții în general³. Așadar, va trebui să ne întoarcem la vremea cînd a fost descoperită analiza superioară, dacă vrem să aflăm ce se înțelegea inițial în matematică prin cuvîntul „funcție”. Răspunsul pe care îl vom căpăta la această întrebare va fi, desigur: „Prin funcție de x se înțelegea o expresie matematică în care figurează x , o formulă care conține litera x ”⁴. Așadar, spre a lua un exemplu, expresia

$$2 \cdot x^3 + x$$

ar fi o funcție de x , iar

$$2 \cdot 2^3 + 2$$

* La 10 ianuarie 1879 și 27 ianuarie 1882.

ar fi o funcție de 2. Acest răspuns nu ne poate satisface, deoarece aici nu se face nici o distincție între formă și conținut, între semn și semnificat⁵; iată o eroare care, de bună seamă, se întâlnește și astăzi în mod frecvent în lucrările matematice, pină și în cele ale unor autori de vază. Am arătat deja cu un alt prilej* defectele teoriilor formale curente din aritmetică. Se vorbește acolo despre semne care nu au și nici nu sint destinate a avea un conținut, dar cărora li se atribuie totuși proprietăți care nu pot fi considerate în mod rațional decît ca aparținînd conținutului unui semn. Tot astfel și aici: o simplă expresie, forma unui conținut, nu poate constitui miezul chestiunii; așa ceva numai conținutul însuși poate fi. Ce conținut, ce semnificație are însă „ 2.2^3+2 ”? Același conținut, aceeași semnificație ca „18” sau „3.6”. Ceea ce se exprimă în egalitatea „ $2.2^3+2=18$ ” este faptul că ansamblul de semne din partea dreaptă are aceeași semnificație ca cel din partea stîngă. Aici trebuie să mă ridic împotriva ideii că, de exemplu, $2+5$ și $3+4$ sînt desigur egali, dar nu aceiași. Această opinie se întemeiază pe aceeași confuzie între formă și conținut, între semn și semnificat. Este ca și cum am vrea să considerăm că violeta plăcut mirositoare diferă de *Viola odorata*, pe motiv că numele lor sună altfel⁷. Deosebirea de desemnare nu poate fi în ea însăși un temei suficient al deosebirii înăuntrul semnificatului. Singurul motiv pentru care lucrurile sînt mai puțin evidente în cazul nostru este faptul că semnificația numeralului nu este ceva perceptibil prin simțuri. Tendința foarte răspîdită de astăzi de a nu recunoaște ca obiect decît ceea ce este perceptibil în mod senzorial ne împinge astfel să considerăm înseși expresiile pentru numere în calitate de numere, deci în calitate de obiecte propriu-zise ale investigației^{**}; or, dacă lucrurile ar sta în-

* *Die Grundlagen der Arithmetik*, Breslau, 1884, § 92 și urm. și „Sitzungsberichte der Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft”, 1885, ședința din 17 iulie⁶.

** A se vedea articolele: „Zählen und Messen erkenntnistheoretisch betrachtet” de H. v. HELMHOLTZ și Über den Zahlbegriff de LEOPOLD KRONECKER (Philosophische Aufsätze. Eduard

tr-adevăr așa, 7 și $2+5$ ar fi efectiv diferite. Dar o asemenea concepție nu poate fi susținută, deoarece nu putem vorbi despre o proprietate aritmetică a unui număr, oricare ar fi el, fără a ne întoarce din nou la semnificația semnelor numerice. De exemplu, proprietatea pe care o are 1 de a fi rezultatul înmulțirii sale cu el însuși ar fi un simplu mit, întrucât nici o cercetare la microscop sau chimică, oricât de departe ar fi dusă, nu ar putea detecta vreodată această proprietate în posesia celui caracter nevinovat pe care îl numim numeralul unu. Se va spune că aceasta e o chestiune de definiție; însă nici o definiție nu este creatoare în sensul de a fi capabilă să confere unui lucru proprietăți pe care acesta nu le avea în prealabil, cu excepția unei singure proprietăți, și anume aceea de a exprima și semnifica ceva în virtutea definiției care introduce acest lucru ca semn*. Caracterele pe care noi le numim simboluri numerice au, pe de altă parte, proprietăți fizice și chimice care depind de mijloacele scrierii. Ne putem imagina că într-o bună zi vor apare simboluri numerice cu totul noi, așa cum de pildă cele arabe au luat locul celor romane. Nimeni nu își închipuie serios că în acest mod am obține numere cu totul noi, obiecte aritmetice cu totul noi, cu proprietăți care mai trebuie încă cercetate. Așadar, dacă trebuie să facem distincție între simbolurile numerice și semnificația acestora, vom fi obligați să recunoaștem că expresiile „2“, „ $1+1$ “, „ $3-1$ “, „ $6:3$ “ au aceeași semnificație; într-adevăr, este de neconceput în ce ar putea consta diferența între ele. Poate că se va replica: $1+1$ este o sumă, în timp ce $6:3$ este un cit. Dar ce este $6:3$? Este numărul care înmulțit cu 3 dă rezultatul 6. Spunem „numărul“ și nu „un nu-

Zeller zu seinem fünfzigjährigen Doktorjubiläum gewidmet, Leipzig, 1887)*.

* Într-o definiție se pune întotdeauna problema asocierii unui sens sau a unei semnificații cu un semn. Acolo unde sensul și semnificația lipsesc cu totul nu putem vorbi propriu-zis nici despre un semn, nici despre o definiție.

măr"; folosind articolul hotărît, indicăm faptul că există un singur asemenea număr. Dar avem:

$$(1 + 1) + (1 + 1) + (1 + 1) = 6$$

și astfel $(1 + 1)$ este tocmai numărul care fusese desemnat ca $(6 : 3)$. Diferitele expresii corespund unor concepții și aspecte diferite dar, nu mai puțin, corespund întotdeauna unuia și aceluiași lucru⁹. Altfel, ecuația $x^2 = 4$ nu ar avea numai rădăcinile 2 și -2 , ci ar avea și rădăcina $(1 + 1)$, ca și nenumărate altele, toate diferite între ele, chiar dacă s-ar asemana între ele într-o anumită privință. Acceptându-se numai două rădăcini reale, se respinge ideea că semnul egalității nu ar semnifica o coincidență completă, ci numai o concordanță parțială. Dacă acceptăm acest adevăr, vedem că expresiile:

$$\begin{aligned} & „2 \cdot 1^3 + 1”, \\ & „2 \cdot 2^3 + 2”, \\ & „2 \cdot 4^3 + 4” \end{aligned}$$

semnifică numere, respectiv 3, 18, 132. Or, dacă funcția ar fi într-adevăr numai semnificația unei expresii de calcul, ea ar fi tocmai un număr; dar prin aceasta aritmetica nu ar fi câștigat nimic nou. După cum se știe însă, cei ce folosesc cuvîntul „funcție” au de obicei în vedere expresii în care un număr este numai indicat în mod indefinit prin litera x , de exemplu,

$$„2 \cdot x^3 + x”;$$

dar aceasta nu schimbă nimic; într-adevăr, dacă este așa, nici această expresie nu indică un număr decît în mod indefinit, iar faptul că scriu această expresie sau pur și simplu scriu „ x ” nu are vreo însemnătate majoră.

Și totuși, notația care folosește „ x ” pentru a indica în mod indefinit ne conduce la concepția cea justă. Spunem că x este argument al funcției și recunoaștem în

$$\begin{aligned} & „2 \cdot 1^3 + 1”, \\ & „2 \cdot 4^3 + 4”, \\ & „2 \cdot 5^3 + 5” \end{aligned}$$

una și aceeași funcție, însă cu argumente diferite, respectiv cu 1, 4 și 5. De aici, putem vedea că tocmai în ceea ce au comun aceste expresii rezidă esența specifică a funcției; cu alte cuvinte, esența ei rezidă în ceea ce mai conține, în afară de „ x ” expresia

$$„2 \cdot x^3 + x”,$$

adică în ceea ce s-ar mai putea scrie aproximativ astfel:

$$„2 \cdot (\quad)^3 + (\quad)”.$$

Ceea ce vreau să arăt este că argumentul nu face parte din funcție însă contribuie împreună cu funcția la constituirea unui întreg complet¹⁰; căci, funcția prin ea însăși trebuie caracterizată ca incompletă, ca cerînd o întregire, sau ca nesaturată. În această privință, funcțiile se deosebesc în mod fundamental de numere. Această esență a funcției explică de ce, pe de o parte, noi recunoaștem aceeași funcție în „ $2 \cdot 1^3 + 1$ ” și „ $2 \cdot 2^3 + 2$ ”, deși aceste două expresii semnifică numere diferite, în timp ce, pe de altă parte, noi nu recunoaștem una și aceeași funcție în „ $2 \cdot 1^3 + 1$ ” și „ $4 - 1$ ”, în pofida valorilor lor numerice egale. Mai mult, vedem acum cît de ușor se ajunge la considerarea formei expresiei ca element esențial al funcției. Noi recunoaștem funcția în expresie, reprezentîndu-ne pe aceasta din urmă ca scindată; posibilitatea unei asemenea scindări este sugerată de însăși structura expresiei.

Cele două părți în care se scindează astfel expresia matematică — semnul argumentului și expresia funcției — nu sînt de aceeași natură; într-adevăr, argumentul este un număr, un întreg încheiat în sine, în timp ce funcția nu este așa. Am putea face o comparație cu divizarea unui segment de către un punct. În acel caz, noi înclinăm a îngloba punctul de diviziune în ambele segmente rezultate. Dar, dacă am vrea să facem o diviziune ireproșabilă, astfel încît să nu luăm ceva de două ori și să nu omitem nimic, punctul de diviziune trebuie inclus în numai unul din segmentele rezultate. Acest segment devine ast-

fel absolut închis în el însuși și poate fi comparat cu argumentul, în timp ce celuilalt segment îi lipsește ceva. Într-adevăr, punctul de diviziune, care s-ar putea numi și extremitate a sa, nu-i aparține. Numai întregindu-l cu această extremitate, sau cu un segment cu două extremități căpătăm, plecînd de la el, ceva complet. De exemplu, dacă spun „ $2 \cdot x^3 + x$ “, x nu trebuie considerat ca făcînd parte din funcție; această literă este menită să indice numai modul de întregire cerut, permițîndu-ne să recunoaștem locurile unde trebuie să întregim semnul argumentului¹¹.

Prin valoarea funcției pentru un argument dat înțelegem rezultatul întregirii funcției cu argumentul. Așa de pildă, 3 este valoarea funcției $2 \cdot x^2 + x$ pentru argumentul 1, deoarece avem:

$$2 \cdot 1^2 + 1 = 3.$$

Există funcții cum sînt $2+x-x$ sau $2+0 \cdot x$, a căror valoare este întotdeauna aceeași, oricare ar fi argumentul; avem $2 = 2+x-x$ și $2 = 2+0 \cdot x$. Dacă am considera că argumentul face parte din funcție, am susține că însuși numărul 2 este această funcție. Dar aceasta ar fi o greșeală. Chiar dacă în cazul de față valoarea funcției este întotdeauna 2, funcția însăși trebuie să fie totuși distinsă de 2; într-adevăr, expresia unei funcții va evidenția întotdeauna unul sau mai multe locuri, destinate a fi umplute cu semnul argumentului.

Metoda geometriei analitice ne oferă un mijloc de reprezentare intuitivă a valorilor unei funcții pentru diferite argumente. Dacă considerăm argumentul ca valoare numerică a unei abscise iar valoarea corespunzătoare a funcției ca valoare numerică a ordonatei unui punct, obținem un ansamblu de puncte care se înfățișează intuiției în cazurile obișnuite ca o curbă. Orice punct al curbei corespunde la un argument luat împreună cu valoarea asociată a funcției.

Așa de pildă,

$$y = x^2 - 4x$$

dă o parabolă; aici, „ y ” indică valoarea funcției, precum și valoarea numerică a ordonatei, iar „ x ” indică în mod similar argumentul precum și valoarea numerică a abscisei. Comparînd cu ea funcția:

$$x(x - 4),$$

găsim că aceste funcții au întotdeauna aceeași valoare pentru același argument. Avem în general:

$$x^2 - 4x = x(x - 4),$$

oricare ar fi numărul luat pentru x . În consecință, curba obținută din

$$y = x^2 - 4x$$

este identică cu cea provenită din

$$y = x(x - 4),$$

fapt pe care îl exprim după cum urmează: funcția $x(x-4)$ are același parcurs valoric ca funcția x^2-4x .

Dacă scriem

$$x^2 - 4x = x(x - 4),$$

noi nu am identificat o funcție cu cealaltă, ci am identificat numai valorile uneia cu valorile celeilalte. Înțelegînd această identitate ca valabilă pentru orice argument substituibil în x , am exprimat astfel faptul că o identitate este valabilă în mod general. Dar noi putem spune de asemenea: „Parcursul valoric al funcției $x(x-4)$ este identic cu cel al funcției x^2-4x ”, și aici avem o identitate între parcursuri valorice. Posibilitatea de a concepe însuși caracterul general al unei identități între valori ale funcțiilor ca o identitate, și anume ca identitate între parcursuri valorice este, după părerea mea, indemonstrabilă; ea trebuie considerată ca o lege fundamentală a logicii*.

* În numeroase expresii din terminologia matematică curentă, cuvîntul „funcție” corespunde tocmai la ceea ce am numit aici parcurs valoric al unei funcții. Însă funcția, în accepția în care am folosit aici acest cuvînt, este anterioară din punct de vedere logic.

Putem introduce, în continuare, o notație succintă pentru parcursul valoric al unei funcții. În acest scop, eu înlocuiesc semnul argumentului din cadrul expresiei unei funcții prin semnul unei vocale din alfabetul elin, pun întreaga expresie între paranteze și inserez în fața ei aceeași literă greacă cu spirit lin. În felul acesta,

$$\epsilon(\epsilon^2 - 4\epsilon)$$

de pildă, reprezintă parcursul valoric al funcției $x^2 - 4x$, iar

$$\alpha(\alpha \cdot [\alpha - 4])$$

parcursul valoric al funcției $x(x-4)$, astfel încât

$$„\epsilon(\epsilon^2 - 4\epsilon) = \alpha(\alpha \cdot [\alpha - 4])”$$

exprimă faptul că primul parcurs valoric este același cu al doilea. Au fost alese litere grecești diferite cu scopul de a arăta că nimic nu ne obligă să adoptăm una și aceeași literă¹².

Dacă înțelegem

$$„x^2 - 4x = x(x - 4)”$$

la fel ca mai sus, aceasta exprimă același sens, dar într-un mod diferit. Expresia prezintă sensul ca valabilitate generală a unei ecuații, în timp ce expresia introdusă ulterior este pur și simplu o ecuație, iar partea dreaptă și partea ei stângă au o semnificație închisă în sine.

În

$$„x^2 - 4x = x(x - 4)”$$

membrul stâng considerat izolat indică un număr numai în mod indeterminat, iar același lucru este valabil pentru membrul drept. Dacă am fi avut pur și simplu „ $x^2 - 4x$ ”, am fi putut scrie în locul său „ $y^2 - 4y$ ”, fără a schimba sensul; într-adevăr, „ y ”, ca și „ x ”, indică un număr numai în mod indefinit. Dar dacă vom combina cele două părți pentru a forma o ecuație, este obligatoriu să alegem una și aceeași literă pentru a figura în ambele părți și astfel ceea ce exprimăm nu este conținut numai în membrul stâng, sau numai în membrul drept, sau numai în semnul egalității și anume exprimăm tocmai generalitatea; firește,

ea este generalitatea unei ecuații, dar mai întâi și întâi este o generalitate.

După cum noi indicăm un număr în mod indefinit printr-o literă, pentru a exprima generalitatea, tot astfel avem nevoie de a indica în mod indefinit, prin litere, o funcție. În acest scop se utilizează, de regulă, literele f și F , astfel încît în „ $f(x)$ ” și „ $F(x)$ ”, x reprezintă argumentul. Aici, nevoia de întregire a funcției se exprimă prin faptul că litera f sau F este însoțită de paranteze; spațiul dintre paranteze este destinat să primească semnul pentru argument. Astfel,

$$„\epsilon f(\epsilon)”$$

indică parcursul valoric al unei funcții care este lăsată nedeterminată.

Cum a fost însă extinsă semnificația cuvîntului „funcție” de-a lungul evoluției științei? Putem deosebi două direcții în care a avut loc această extindere.

În primul rînd, cîmpul operațiilor matematice aplicate în construirea funcțiilor a fost extins. Pe lîngă adunare, înmulțire, ridicare la putere și inversele lor, s-au introdus diversele procedee de trecere la limită; desigur, nu întotdeauna a existat conștiința clară a faptului că în acest fel se ajunge la ceva principial nou. S-a mers încă și mai departe, ba chiar a devenit necesar să apelăm la limbajul cotidian, deoarece limbajul simbolic al analizei era inoperant atunci cînd, de exemplu, se vorbea despre o funcție a cărei valoare este 1 pentru argumente raționale și 0 pentru argumente iraționale.

În al doilea rînd, cîmpul argumentelor și al valorilor posibile ale funcțiilor a fost extins prin admiterea numerelor complexe. Legat de aceasta, sensul expresiilor „sumă”, „produs” etc. a trebuit, de asemenea, să fie determinat într-un mod mai larg.

În ambele direcții, eu merg încă și mai departe¹³. Eu încep prin a adăuga la semnele $+$, $-$, etc., care servesc la construirea unei expresii funcționale, semne cum sînt $=$, $>$, $<$, astfel că pot vorbi, de exemplu, despre funcția

$x^2 = 1$, unde x ocupă locul argumentului, ca și înainte Prima problemă care se ridică aici este aceea a valorilor funcției pentru diferite argumente. Or, dacă îl înlocuim pe x prin -1 , 0 , 1 , 2 , în mod succesiv, obținem :

$$(-1)^2 = 1,$$

$$0^2 = 1,$$

$$1^2 = 1,$$

$$2^2 = 1.$$

Dintre aceste egalități, prima și a treia sînt adevărate, iar celelalte sînt false. Spun acum: „valoarea funcției noastre este o valoare de adevăr“ și deosebesc între valoarea de adevăr a ceea ce este adevărat și valoarea de adevăr a ceea ce este fals. Pe prima o numesc în mod succint Adevăratul, iar pe a doua Falsul¹⁴. În consecință, „ $2^2 = 4$ “, de exemplu, desemnează Adevăratul, în timp ce „ 2^2 “ îl desemnează pe 4. La rîndul său, „ $2^2 = 1$ “ desemnează Falsul. În consecință,

$$„2^2 = 4”, „2 > 1”, „2^4 = 4^2”$$

au aceeași semnificație, adică Adevăratul, astfel că

$$(2^2 = 4) = (2 > 1)$$

constituie o egalitate corectă.

Evident, se poate ridica obiecția că „ $2^2 = 4$ ” și „ $2 > 1$ ” sînt totuși aserțiuni cu totul diferite, exprimă gânduri cu totul diferite; or, „ $2^4 = 4^2$ ” și „ $4 \cdot 4 = 4^2$ ” exprimă de asemenea gânduri diferite, și cu toate acestea noi putem înlocui „ 2^4 ” prin „ $4 \cdot 4$ ”, deoarece ambele semne au aceeași semnificație. În consecință, „ $2^4 = 4^2$ ” și „ $4 \cdot 4 = 4^2$ ” au, la rîndul lor, aceeași semnificație. De aici reiese că din identitatea semnificației nu urmează identitatea gândului. Dacă spunem : „Luceafărul de seară este o planetă care are o perioadă de revoluție mai mică decît Pămîntul”, gândul pe care îl exprimăm este altul decît cel din propoziția „Luceafărul de dimineață este o planetă care are o perioadă de revoluție mai mică decît Pămîntul”; într-adevăr, un om care nu

știe că Luceafărul de dimineață este Luceafărul de seară ar putea considera una din propoziții adevărată iar pe cealaltă falsă. Nu mai puțin, ambele propoziții trebuie să aibă aceeași semnificație, căci una rezultă din cealaltă prin simpla înlocuire a cuvintelor „Luceafărul de seară” și „Luceafărul de dimineață”, cuvinte care au aceeași semnificație, adică sînt nume proprii ale unuia și aceluiași corp ceresc. Trebuie să deosebim între sens și semnificație. „2⁴” și „4 · 4” au negreșit aceeași semnificație, adică sînt nume proprii ale aceluiași număr, însă nu au același sens; în consecință, „2⁴ = 4²” și „4 · 4 = 4²” au aceeași semnificație, însă nu același sens; în cazul de față, aceasta înseamnă că ele nu conțin același gînd*.

De aceea, tot așa cum scriem:

$$„2^4 = 4 \cdot 4”,$$

putem scrie cu egală îndreptățire

$$„(2^4 = 4^2)_{\text{L}} = (4 \cdot 4 = 4^2)”$$

și

$$„(2^2 = 4) = (2 > 1)”$$

Mai departe, ne putem întreba: ce ne face să includem semnele =, >, < în cîmpul semnelor care permit construirea unei expresii funcționale? În momentul de față, după cum se pare, cîștigă tot mai mult teren concepția după care aritmetica este o logică mai dezvoltată iar fundarea mai riguroasă a legilor aritmeticii le reduce la legi pur logice și numai la acestea. Eu însumi împărtășesc această părere și întemeiez pe baza ei cerința ca limbajul simbolic al aritmeticii să fie dezvoltat într-un

* Nu îmi scapă faptul că acest mod de expunere poate părea la prima vedere arbitrar și superficial și că ar fi de dorit să-mi susțin concepția printr-o analiză mai aprofundată. A se vedea studiul meu în curs de apariție „Über Sinn und Bedeutung” în „Zeitschrift für Philosophie und phil. Kritik”.

simbolism logic. Va trebui acum să arătăm modul în care acest deziderat se realizează în cazul nostru.

Am văzut că valoarea funcției noastre $x^2 = 1$ este întotdeauna una din cele două valori de adevăr. Or, dacă pentru un argument determinat, de exemplu -1 , valoarea funcției este Adevăratul, putem exprima aceasta după cum urmează: „numărul -1 are proprietatea că pătratul lui este 1 ”; ori, mai succint, „ -1 este o rădăcină pătrată din 1 ”, sau, de asemenea, „ -1 cade sub conceptul de rădăcină pătrată din 1 ”. Dacă valoarea funcției $x^2 = 1$ pentru un anumit argument, de exemplu pentru 2 , este Falsul, putem exprima aceasta după cum urmează: „ 2 nu este o rădăcină pătrată a lui 1 ” sau „ 2 nu cade sub conceptul de rădăcină pătrată din 1 ”. Vedem, deci, cât de strâns este legat ceea ce în logică se numește concept cu ceea ce noi numim funcție. Într-adevăr, putem spune din capul locului: un concept este o funcție a cărei valoare este întotdeauna o valoare de adevăr¹⁵. La rîndul ei, valoarea funcției

$$(x + 1)^2 = 2(x + 1)$$

este întotdeauna o valoare de adevăr. Obținem Adevăratul ca valoare a ei pentru argumentul -1 , de exemplu, iar aceasta se mai poate exprima și astfel: -1 este un număr mai mic cu o unitate decît un număr al cărui pătrat este egal cu dublul său. Aceasta exprimă faptul că -1 cade sub un concept. Dar funcțiile

$$x^2 = 1 \text{ și } (x + 1)^2 = 2(x + 1)$$

au întotdeauna aceeași valoare pentru același argument, adică Adevăratul pentru argumentele -1 și $+1$, și Falsul pentru toate celelalte argumente. Potrivit convențiilor adoptate anterior, vom spune de asemenea că aceste funcții au același parcurs valoric și vom exprima aceasta în simboluri după cum urmează:

$$\dot{\epsilon}(e^2 \quad 1) \quad \dot{\alpha}([\alpha + 1]^2 = 2[\alpha + 1]).$$

În logică, aceasta se numește identitate a extensiunii conceptelor. Ca atare, putem desemna ca extensiune a unui

concept parcursul valoric al unei funcții a cărei valoare pentru orice argument este o valoare de adevăr¹⁶.

Nu ne vom opri la ecuații și inegalități¹⁷. Forma lingvistică a ecuațiilor este o propoziție declarativă. O propoziție conține — sau cel puțin pretinde a conține — ca sens al ei un gând; acest gând este în general adevărat sau fals; cu alte cuvinte, el are în general o valoare de adevăr care trebuie privită de asemenea ca semnificație a propoziției, tot așa cum, de pildă, numărul 4 este semnificația expresiei „ $2+2$ ”, sau cum Londra este semnificația expresiei „capitala Angliei”.

Propozițiile declarative în general, ca și ecuațiile sau expresiile analitice se pot gândi ca fiind scindate în două părți; o parte completă în ea însăși și o alta care necesită o întregire, sau care este, ca să spunem așa, „nesaturată”. De exemplu, putem scinda propoziția

„Caesar a cucerit Gallia”

în „Caesar” și „a cucerit Gallia”. A doua parte este „nesaturată”, poartă cu sine un loc liber și abia cînd acest loc este umplut cu un nume propriu sau cu o expresie care ține locul unui nume propriu apare un sens complet. Aici, de asemenea, numesc „funcție” ceea ce semnifică această parte nesaturată. În cazul de față, argumentul este Caesar.

După cum vedem, aici am întreprins o extindere în cealaltă direcție, adică relativ la ceea ce poate figura în calitate de argument. Acum se pot admite nu numai numere, ci și obiecte în general — persoanele fiind considerate și ele, de bună seamă, drept obiecte. Cele două valori de adevăr au fost deja introduse ca valori posibile ale unei funcții. Va trebui să mergem mai departe și să admitem fără restricție obiecte ca valori ale funcțiilor. Pentru a obține un exemplu în acest sens, să plecăm, de exemplu, de la expresia

„capitala pe care o are Imperiul german”

Această expresie ține în mod evident locul unui nume propriu și semnifică un obiect. Să scindăm expresia în părțile

„capitala pe care o are” și „Imperiul german”;

prima parte este „nesaturată”, în timp ce cealaltă parte este completă în sine. Conform celor spuse anterior,

„capitala pe care o are”

o numesc expresie a unei funcții. Dacă luăm Imperiul german ca argument, căpătăm Berlin ca valoare a funcției¹⁸.

Admițând fără nici o restricție obiecte ca argumente și valori de funcții, problema care se pune acum este ce anume numim aici obiect. Consider că o definiție școlară este imposibilă, deoarece aici avem ceva prea simplu pentru a mai admite o analiză logică. Tot ce putem face este să indicăm ce se are în vedere¹⁹. În cele de față putem numai să spunem în mod succint: Un obiect este tot ce nu este funcție, astfel că expresia sa nu conține nici un loc liber²⁰.

O propoziție declarativă nu conține nici un loc liber și ca atare semnificația ei trebuie considerată ca obiect. Această semnificație este însă o valoare de adevăr. Așadar, cele două valori de adevăr sînt obiecte²¹.

Mai sus, am prezentat egalități între parcursuri valorice, de exemplu:

$$„\epsilon(\epsilon^2 - 4\epsilon) = \alpha(\alpha[\alpha - 4])”.$$

Putem efectua aici o scindare în „ $\epsilon(\epsilon^2 - 4\epsilon)$ ” și „ $() = \alpha(\alpha[\alpha - 4])$ ”.

Această a doua parte cere o întregire, întrucît la stînga semnului „egal” ca conține un loc liber. Prima parte, „ $\epsilon(\epsilon^2 - 4\epsilon)$ ” este absolut închisă în sine, ca semnificînd deci un obiect. Parcursurile valorice ale funcțiilor sînt obiecte, în timp ce funcțiile însele nu sînt obiecte. Am folosit și pentru „ $\epsilon(\epsilon^2 - 1)$ ” denumirea de parcurs valoric, dar am fi putut s-o numim și extensiunea conceptului de rădă-

cină pătrată din 1. Extensiunile conceptelor sînt, de asemenea, obiecte, deși conceptele însele nu sînt obiecte.

După ce am extins astfel cîmpul lucrurilor care pot fi luate ca argumente va trebui să stabilem cu mai multă precizie semnificațiile semnelor intrate în uz. Atîta timp cît considerăm că singurele obiecte din aritmetică sînt numerele întregi, literele a și b în „ $a+b$ ” vor indica numai numere întregi, iar semnul plus va trebui definit numai ca aplicat la numere întregi. Orice extindere a domeniului din care fac parte obiectele indicate prin „ a ” și „ b ” ne obligă să dăm o nouă definiție a semnului plus. Rigorizarea științifică pare să impună luarea unor măsuri care să excludă posibilitatea ca în unele cazuri o expresie să nu aibă semnificație, să excludă posibilitatea de a opera, fără să ne dăm seama, cu semne vide, iluzionîndu-ne că avem de-a face cu obiecte. În trecut, am avut experiențe negative în tratarea șirurilor infinite divergente. Așadar, este necesar să stipulăm reguli din care să decurgă, de exemplu, ce semnifică

$$„\odot + 1”,$$

în cazul cînd „ \odot ” ar semnifica soarele. Conținutul stipulărilor este relativ indiferent; important este însă ca ele să fie făcute, astfel încît „ $a + b$ ” să aibă întotdeauna o semnificație, oricare ar fi semnele obiectelor determinate, pe care le punem în locul lui „ a ” și „ b ”. În ceea ce privește conceptele, se cere ca pentru orice argument să avem o valoare de adevăr ca valoare a lor și ca pentru orice obiect să se poată determina dacă el cade sau nu sub concept²². Cu alte cuvinte, în cazul conceptelor, se ridică cerința delimitării lor precise; dacă această cerință nu ar fi satisfăcută, stabilirea unor legi logice despre concepte ar fi imposibilă. Pentru orice argument x pentru care „ $x + 1$ ” ar fi lipsit de semnificație, funcția $x + 1 = 10$ nu ar avea nici ea o valoare, și deci nu ar avea vreo valoare de adevăr, astfel că conceptul:

„ceea ce dă 10 atunci cînd este mărit cu 1”

nu ar avea granițe precise. Cerința delimitării riguroase a conceptelor antrenează cerința ca funcțiile în general să aibă o valoare pentru orice argument.

Pînă acum am considerat valorile de adevăr numai ca valori ale funcțiilor, nu ca argumente. Potrivit celor spuse mai sus, o funcție trebuie să capete o valoare și în cazul cînd luăm o valoare de adevăr ca argument; în ceea ce privește semnele intrate deja în uz, singurul lucru important pentru o regulă îndreptată în acest sens este, de cele mai multe ori, faptul că ea există, iar conținutul ei concret nu intră prea mult în joc. Dar acum trebuie să ne ocupăm de unele funcții care ne interesează tocmai atunci cînd argumentul lor este o valoare de adevăr²³.

Voi introduce ca funcție de acest gen

$$\text{---}x,$$

stipulînd că valoarea acestei funcții va fi Adevăratul, dacă este luat ca argument Adevăratul și că în toate celelalte cazuri valoarea acestei funcții este Falsul, așadar atît atunci cînd argumentul este Falsul, cît și atunci cînd argumentul nu este o valoare de adevăr. Prin urmare, ca să dăm un exemplu,

$$\text{---}1 + 3 = 4$$

este Adevăratul, în timp ce atît

$$\text{---}1 + 3 = 5$$

cît și

$$\text{---}4$$

sînt Falsul. Așadar, această funcție are ca valoare a ei însuși argumentul, atunci cînd acesta din urmă este o valoare de adevăr. În trecut, eu numeam această linie orizontală linia conținutului — denumire care nu mi se mai pare adecvată. Acum o voi numi pur și simplu orizontală.

Cînd scriem o ecuație sau o inegalitate, de exemplu $5 > 4$, de obicei noi vrem să exprimăm în același timp o

judecată; în exemplul nostru, vrem să asertăm faptul că 5 este mai mare ca 4. Conform concepției pe care o înfățișez aici, „ $5 > 4$ ” și „ $1 + 3 = 5$ ” ne oferă tocmai expresii pentru valori de adevăr, fără a se face astfel vreo aserțiune. Această separare a actului judecării de materia judecății pare indispensabilă, deoarece în caz contrar nu am putea exprima o simplă supoziție — înfățișarea unui caz — fără a judeca simultan dacă el are loc sau nu. Așadar, avem nevoie de un semn special pentru a fi în măsură a aserta ceva. În acest scop, eu folosesc o linie verticală în capătul din stînga al orizontalei, așa că, de exemplu, scriind

$$„\vdash 2 + 3 = 5”$$

noi asertăm²⁴ că $2 + 3$ este egal cu 5. Așadar, aici nu scriem numai o valoare de adevăr, ca în

$$„2 + 3 = 5”$$

ci în același timp mai afirmăm că această valoare este Adevăratul*.

Cea mai simplă funcție care urmează ar putea fi aceea a cărei valoare este Falsul pentru exact acele argumente pentru care valoarea lui $\neg x$ este Adevăratul și invers, este Adevăratul pentru argumentele pentru care valoarea lui $\neg x$ este Falsul. Eu o voi nota astfel:

$$\mathbf{T} x,$$

și voi numi aici liniuța verticală linia negației. Înțeleg această funcție ca avînd argumentul $\neg x$:

$$(\mathbf{T} x) = (\mathbf{T} [\neg x]),$$

* Semnul asertării nu poate fi folosit spre a construi o expresie funcțională, deoarece el nu servește, conjugat cu alte semne, la desemnarea unui obiect „ $\vdash 2 + 3 = 5$ ” nu desemnează nimic; el asertează ceva.

imaginându-mi totodată că cele două linii orizontale se confundă. Dar avem de asemenea:

$$(\text{---}[\mathbf{T} x]) = (\mathbf{T} x)^{25},$$

deoarece valoarea lui $\mathbf{T} x$ este întotdeauna o valoare de adevăr. De asemenea, în „ $\mathbf{T} x$ ” voi înțelege ambele linii, din dreapta și din stînga liniei negației, ca orizontale, în sensul în care am definit anterior acest cuvînt. Ca atare,

$$,,\mathbf{T} 2^2 = 5''$$

de exemplu, semnifică Adevăratul, și putem adăuga semnul asertării:

$$\vdash \mathbf{T} 2^2 = 5;$$

prin aceasta asertăm că $2^2 = 5$ nu este Adevăratul, sau că 2^2 nu este 5. Dar, totodată,

$$\mathbf{T} 2$$

este Adevăratul, întrucît $\text{---}2$ este Falsul:

$$\vdash 2,$$

adică 2 nu este Adevăratul.

Modul în care prezint generalitatea va reieși cel mai bine dintr-un exemplu. Să presupunem că trebuie să exprimăm faptul că orice obiect este identic cu el însuși. În

$$x = x$$

avem o funcție al cărei argument este indicat de „ x ”. Trebuie să spunem acum că valoarea acestei funcții este în-

totdeauna Adevăratul, orice am lua ca argument. Eu înțeleg semnul

$$„ \sim a \rightarrow f(a) ”^{26}$$

ca însemnînd Adevăratul atunci cînd funcția $f(x)$ are întotdeauna Adevăratul ca valoare a sa, pentru orice argument; în toate celelalte cazuri

$$„ \sim a \rightarrow f(a) ”$$

trebuie să semnifice Falsul. Pentru funcția noastră $x = x$ avem primul caz. Așadar,

$$\sim a \rightarrow a = a$$

este Adevăratul; vom scrie aceasta după cum urmează:

$$\vdash \sim a \rightarrow a = a^{27}$$

Liniile orizontale de la dreapta și stînga concavității trebuie considerate ca orizontale în sensul nostru. În locul lui „a” ar putea fi aleasă orice altă literă gotică; excepție fac cele care trebuie să servească drept litere pentru o funcție, ca de pildă \int și \mathfrak{F} .

Această notație permite întotdeauna negarea generalității, ca în

$$\sim \sim a \rightarrow a^2 = 1^{28}.$$

Se constată că $\sim a \rightarrow a^2 = 1$ este Falsul, fiindcă nu pentru orice argument valoarea funcției $x^2 = 1$ este Adevăratul. De exemplu, pentru argumentul 2 obținem $2^2 = 1$, ceea ce este Falsul. Acum, dacă $\sim a \rightarrow a^2 = 1$ este Fal-

sul, atunci $\neg a \rightarrow a^2 = 1$ este Adevăratul, conform regulii de mai sus pentru linia negației. Așadar, avem

$$\vdash \neg a \rightarrow a^2 = 1$$

adică „nu orice obiect este rădăcină pătrată din 1“, sau „există obiecte care nu sînt rădăcini pătrate din 1“.

Putem oare exprima și faptul că nu există rădăcini pătrate din 1? Fără îndoială: nu avem decît să luăm, în locul funcției $x^2 = 1$, funcția

$$\vdash x^2 = 1.$$

Contopind orizontalele în

$$'' \neg a \rightarrow \vdash a^2 = 1 ''$$

noi obținem²⁹

$$'' \neg a \rightarrow \vdash a^2 = 1 ''$$

Aceasta desemnează Falsul, deoarece nu orice argumente fac ca valoarea funcției

$$\vdash x^2 = 1$$

să fie Adevăratul. De exemplu:

$$\vdash 1^2 = 1$$

este Falsul, deoarece $1^2 = 1$ este Adevăratul. Dat fiind că

$$\neg a \rightarrow \vdash a^2 = 1$$

este deci Falsul,

$$\vdash \neg a \rightarrow \vdash a^2 = 1$$

este Adevăratul:³⁰

$$\vdash a \vdash a^2=1;$$

cu alte cuvinte, „nu pentru orice argument, valoarea funcției

$$\vdash x^2 = 1$$

este Adevăratul“, sau „nu pentru orice argument valoarea funcției $x^2=1$ este Falsul“, sau „există cel puțin o rădăcină pătrată din 1“.

La acest punct, se pot da câteva exemple în simboluri și cuvinte:

$$\vdash a \vdash a \geq 0,$$

există cel puțin un număr pozitiv³¹;

$$\vdash a \vdash a < 0,$$

există cel puțin un număr negativ³²;

$$\vdash a \vdash a^3 - 3a^2 + 2a = 0^{33},$$

există cel puțin o rădăcină a ecuației

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

Pornind de aici se întrevește modul în care se exprimă propozițiile existențiale, care sînt atît de importante. Dacă folosim litera funcțională f ca o indicație indefinită a unui concept, atunci

$$\vdash a \vdash f(a)$$

ne oferă forma care înglobează ultimele exemple, abstracție făcînd de semnul asertării³⁴. Expresiile

$$"\forall a (a^2 = 1)",$$

$$"\forall a (a \geq 0)",$$

$$"\forall a (a < 0)",$$

$$\forall a (a^3 - 3a^2 + 2a = 0)"^{35}$$

provin din această formă într-un mod analog celui în care din x^2 provin „1²“, „2²“, „3²“. Dar tot așa cum în x^2 avem o funcție al cărei argument este indicat de „x“, la fel eu înțeleg

$$"\forall f (f(a))"$$

ca expresie a unei funcții al cărei argument este indicat de „f“. O asemenea funcție, evident, diferă fundamental de funcțiile considerate pînă acum, deoarece argument al ei poate fi numai o funcție. Însă, așa cum funcțiile diferă în mod fundamental de obiecte, tot astfel funcțiile ale căror argumente sînt și trebuie să fie funcții diferă în mod fundamental de funcțiile ale căror argumente sînt obiecte și nu pot fi nimic altceva. Pe acestea din urmă le numesc funcții de treapta unu iar pe primele funcții de treapta doi. În același mod, eu disting între concepte de treapta unu și concepte de treapta doi*. Funcții de treapta doi au fost efectiv folosite încă de mult în analiză; un exemplu îl constituie integrala definită (considerînd ca argument funcția care trebuie integrată).

* Cf. lucrarea mea *Fundamentele aritmeticii* [*Grundlagen der Arithmetik*], Breslau, 1884. Am folosit acolo termenul „ordinul doi“, în loc de „treapta doi“. Demonstrația ontologică a existenței lui Dumnezeu este afectată de eroarea tratării existenței ca un concept de treapta unu.

Să spunem ceva și despre funcțiile cu două argumente. Noi căpătăm expresia unei funcții prin scindarea semnului complex al unui obiect într-o parte saturată și una nesaturată. Astfel, noi scindăm semnul Adevăratului

$$„3 > 2”$$

în „3” și „ $x > 2$ ”. Putem scinda, mai departe, partea nesaturată „ $x > 2$ ” în același mod, în „2” și

$$„x > y”,$$

unde „y” ne face cunoscut locul gol ocupat înainte de „2”. În

$$x > y$$

noi avem o funcție cu două argumente, unul indicat de „x” iar celălalt de „y”, iar în

$$3 > 2$$

noi avem valoarea acestei funcții pentru argumentele 3 și 2. Avem în cazul de față o funcție a cărei valoare este întotdeauna o valoare de adevăr. Am numit concepte astfel de funcții de un argument; numim relații atare funcții de două argumente. De exemplu, avem de asemenea relații în

$$x^2 + y^2 = 9$$

și în

$$x^2 + y^2 > 9,$$

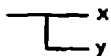
în timp ce funcția

$$x^2 + y^2$$

are ca valori numere. Ca atare, pe aceasta din urmă nu o vom numi relație.

În acest moment, putem introduce o funcție care nu este specifică aritmeticii.

Valoarea funcției



va fi Falsul dacă luăm Adevăratul în calitate de argument y și în același timp luăm un obiect care nu este Adevăratul în calitate de argument x ; în toate celelalte cazuri, valoarea funcției va fi Adevăratul. Linia orizontală inferioară și cele două segmente în care verticala împarte orizontala superioară trebuie privite ca orizontale. Ca atare, putem considera întotdeauna ca argumente ale funcției noastre — x și — y , adică valori de adevăr³⁶.

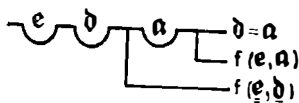
Printre funcțiile de un argument, am distins între funcții de treapta unu și funcții de treapta doi. Acum devine posibilă o mai mare varietate. O funcție de două argumente poate cere argumente de aceeași treaptă, sau de trepte diferite; avem funcții de treaptă omogenă și de treaptă neomogenă. Un exemplu de funcție de treaptă neomogenă este cîtul diferențial, dacă luăm ca argumente funcția care trebuie diferențiată și argumentul după care trebuie diferențiată; un alt exemplu este integrala definită, dacă luăm ca argumente funcția care trebuie integrată și limita superioară. Funcțiile de treaptă uniformă se pot împărți la rîndul lor în funcții de treapta unu și funcții de treapta doi. Un exemplu de funcție de treapta doi este

$$F(f[1]),$$

unde „ f ” și „ f ” indică argumentele.

În privința funcțiilor de treapta doi de un singur argument, noi trebuie să facem o distincție, după cum rolul acestui argument poate fi jucat de o funcție ~~de~~ de un argument sau de o funcție de două argumente; într-adevăr, o funcție de un argument este atît de diferită în esență de o funcție de două argumente, încît una nu poate figura ca argument în același loc ca cealaltă. Unele funcții

de treapta doi de un argument reclamă ca acest argument să fie o funcție de un argument, în timp ce altele reclamă o funcție de două argumente; aceste două clase sînt riguros delimitate.



este un exemplu de funcție de treapta doi de un argument, funcție care cere ca acest argument să fie o funcție de două argumente³⁷. Litera f indică aici argumentul, iar cele două locuri, separate de virgulă, dinăuntrul parantezelor care urmează lui „ f ” permit să se constate că f reprezintă o funcție de două argumente.

În cazul funcțiilor de două argumente, varietatea este încă și mai mare.

Dacă aruncăm de aici o privire retrospectivă asupra dezvoltării aritmeticii, constatăm o ascensiune din treaptă în treaptă. Mai întii calculele se făceau cu numere individuale, cu 1, cu 3, etc.;

$$2 + 3 = 5, \quad 2 \cdot 3 = 6,$$

sînt teoreme de acest gen. Apoi s-a progresat la legi mai generale, valabile pentru toate numerele. În mod corespunzător, pe planul notației s-a trecut la operarea cu litere.

O teoremă de acest gen este

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

În această fază, s-a ajuns pînă la tratarea funcțiilor individuale, dar cuvîntul nu era încă folosit în sensul său matematic, iar semnificația sa nu fusese încă sesizată. Treapta imediat următoare a constituit-o recunoașterea unor legi generale ale funcțiilor, însoțite de făurirea termenului tehnic „funcție”. În cadrul simbolismului, la aceasta corespunde introducerea unor litere ca f , F pen-

tru a indica în mod indefinit funcții. O teoremă de acest gen este³⁸

$$\frac{df(x) \cdot F(x)}{dx} = f'(x) \cdot \frac{dF(x)}{dx} + f(x) \cdot \frac{dF(x)}{dx}.$$

Ajunși la acest punct, oamenii aveau funcții particulare de treapta doi, fără a avea însă ideea a ceea ce am numit funcție de treapta doi. Prin elaborarea acestei idei înregistrăm următorul pas înainte. Se poate crede că procesul va continua. Probabil însă că pasul următor nu mai este atît de bogat în consecințe ca cele anterioare; într-adevăr, în locul funcțiilor de treapta doi se pot considera, în cadrul dezvoltărilor ulterioare, funcții de treapta unu — așa cum se va arăta în altă parte. Dar această circumstanță nu înlătură distincția dintre funcțiile de treapta unu și funcțiile de treapta doi, distincție care nu este arbitrară, ci adînc înrădăcinată în natura lucrurilor³⁹.

De asemenea, în locul funcțiilor de două argumente, putem opera cu funcții de un singur argument, însă un argument complex; dar distincția între funcțiile de un argument și funcțiile de două argumente continuă să subziste la fel de riguros.

¹ La 10/24 ianuarie 1879, Frege a prezentat în ședința Societății de medicină și științele naturii din Jena comunicarea „Anwendungen der Begriffsschrift“ (Aplicații ale Scrierii conceptuale); aceasta a fost tipărită în „Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft“, 13, 1879, pp. 29—33. Aplicațiile scrierii conceptuale, la care se referă titlul comunicării, constau în formalizarea unor propoziții aritmetice și geometrice. Frege ia câteva propoziții matematice și pune în evidență formulele corespunzătoare în notația lui.

La 24 ianuarie 1882, Frege a comunicat în fața Societății din Jena articolul „Über den Zweck der Begriffsschrift“ (Cu privire la scopul Scrierii conceptuale). Răspunzând observațiilor critice formulate de către E. Schröder în recenzia sa la *Begriffsschrift*, Frege preciza deosebirea principală dintre limbajul logicii lui Boole și propriul său limbaj al formulelor, spre a sublinia apoi că notația sa — pe baza unei analize mai fine a propozițiilor — permite formalizarea unor propoziții matematice inabordabile cu mijloacele logicii lui Boole. În afară de aceasta, *Scrierea conceptuală* merge mai departe decât o logică abstractă cum este limbajul algebric al lui Boole, fiind expresia unui conținut: „ceea ce am vrut să creez nu este doar un *calculus ratiocinator* — scria autorul —, ci o *lingua characteristica* în sensul lui Leibniz. Procedând astfel, eu recunosc totuși că o parte necesară a Scrierii conceptuale este calculul deductiv. Dacă lucrul acesta nu a fost înțeles, s-ar putea ca motivul să fie acela că am pus prea mult pe primul plan aspectul logic abstract“. Frege avea în vedere, desigur, acea fuziune organică a logicii cu matematica pe care analiza sa logică și definițiile unor noțiuni matematice în termeni pur logici păreau s-o îngăduie.

² „Metoda generală a diferențierii și integrării — scrie un istoric al matematicii — construită cu deplina înțelegere a faptului că un proces este inversul celuilalt a putut fi descoperită numai de oameni care stăpîneau atât metoda geometrică a gre-

cilor și a lui Cavalieri, cât și metoda algebrică a lui Descartes și Wallis. Asemenea oameni nu s-au putut ivi decât după 1660 și ei au apărut într-adevăr în persoana lui Newton și Leibniz. S-a scris foarte mult despre problema priorității acestei descoperiri, dar astăzi este stabilit că amândoi au descoperit în mod independent metodele lor. Newton a descoperit primul analiza (în 1665—1666), Leibniz în 1673—1676, dar Leibniz a fost primul care a publicat în acest domeniu (Leibniz în 1684—1686, Newton în 1704—1736 (postum). Școala lui Leibniz a fost mult mai strălucită, în comparație cu școala lui Newton“ (Dirk J. Struik, *Abriss der Geschichte der Mathematik*, Berlin, 1963, p. 118).

Conceptul de funcție a fost abstras treptat în cursul veacului al XVII-lea din studiul naturii, în special din studiul mișcării. Termenul „funcție“ a fost introdus, se pare, de către Leibniz, căruia îi aparține și paternitatea termenilor „constantă“, „variabilă“ ca și aceea a notațiilor uzitate pînă astăzi pentru funcții în general și pentru funcțiile analizei în mod deosebit. Cf., de exemplu, Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, 1972, în special pp. 338—340, 403—406, 505—507. Evoluția conceptului de funcție a fost schițată de matematicianul german Hermann Hankel într-o expunere pe care cititorul român o poate consulta în: Oskar Becker, *Fundamentele matematicii*, Editura Științifică, 1968, pp. 248—253.

³ O asemenea lege este menționată de către Frege spre finele articolului de față (vezi nota 37).

⁴ A rămas astfel celebră definiția pe care marele Euler o dă în *Introductio in Analysin Infinitorum* (1748); *Functio quantitatis variabilis est expressio analytica quomodocumque composita ex illa quantitate variabili et numeris seu quantitibus constantibus*. (O funcție de o cantitate variabilă este o expresie analitică compusă într-un mod arbitrar din acea cantitate variabilă, precum și din numere sau cantități constante). Definiția, pe care o reproducem apud Hankel (în: Oskar Becker, *op. cit.*, p. 249) definește funcția ca o expresie și anume una *analitică*. Hankel comentează: „Prin «expresie analitică», a cărei semnificație Euler nu socotește necesar să o determine mai de aproape, nu trebuie să înțelegem altceva decât o dependență a mărimilor, formată după tipul func-

țiilor algebrice... Sprijinindu-se mereu pe acel model al funcțiilor algebrice, toate proprietățile generale observate la funcțiile algebrice, continuitatea lor specială, singularitățile lor, modul lor particular de a deveni discontinue sau infinite, au fost transpuse imediat la toate funcțiile" (*ibid.*). Să reținem din acest pasaj atât obârșia algebrică a noțiunii de funcție cât și confuzia pe care Frege o va denunța câteva rânduri mai jos, între expresia funcției și funcția ca atare. Hankel însuși trece cu dezinvoltură de la caracterizarea funcției ca expresie la caracterizarea în termeni de „dependență a mărimilor“.

⁵ Distanța dintre semn și ceea ce acesta desemnează este înțeleasă de Frege ca o distincție între formă și conținut; prin conținut se are în vedere semnificația expresiei, prin formă, expresia ca atare. Citeva propoziții mai incolo, se vorbește despre „simpla expresie“ ca despre „forma unui conținut“. De aici nu mai este departe până la sugestia că structura expresiei este (imită, redă) structura a ceea ce expresia semnifică. Motivul va reveni în expunerea lui Frege cu o precizie sporită: structura expresiei nu desemnează dar sugerează cumva proprietățile structurale ale conținuturilor vizate. În speță, caracterul incomplet, nesaturat al expresiei funcționale redă un caracter al funcției însăși. A se vedea și nota 7.

⁶ Frege are în vedere comunicarea sa „Über formale Theorien der Arithmetik“, în care supune unei critici severe conceperea aritmeticii ca „teorie formală“ — formală, în înțelesul că ar avea ca obiecte semne lipsite de orice conținut, semne ale căror proprietăți ar fi conferite prin intermediul unor definiții.

⁷ Două expresii avînd același conținut, adică desemnînd un același lucru, vor diferi numai prin forma lor. De unde, prin abuz de limbaj, se ajunge la caracterizarea expresiilor însele ca forme.

⁸ Numărul nu este perceptibil în mod senzorial, spre deosebire de semnul său; Helmholtz și Kronecker le identificau însă.

Herman v. Helmholtz (1821—1894), fizician, psiholog și epistemolog de vază, a dezvoltat o concepție empiristă pe care și-o caracteriza astfel: „Eu privesc aritmetica sau teoria numerelor pure ca o metodă edificată pe fapte pur psihologice, care ne instruiește asupra aplicării corecte a unui sistem de simboluri

(și anume, sistemul numerelor) de o întindere nelimitată și cu o posibilitate nelimitată de rafinare“. Reproducînd acest citat, Frege (în *Grundgesetze der Arithmetik*, vol. II, pp. 139—140) îl comentează: „Aici, de asemenea, semnele capătă o forță magică, întrucît semnificațiile lor sînt scăpate din vedere. Pe deasupra sînt puse în joc psihologia și empiria, ceea ce nu face decît să accentueze lipsa de claritate...“.

Leopold Kronecker (1823—1891), matematician preintuizionist, a preconizat aritmetizarea întregii matematici, adică reducerea conceptelor analizei la concepte aritmetice, în ultimă instanță la conceptul de număr întreg, respingînd fundamentarea analizei pe definiția numerelor iraționale. Frege discută articolul lui Kronecker, „Despre conceptul de număr“, în *Grundgesetze der Arithmetik*, vol. II, criticînd în primul rînd identificarea numărului întreg cu simbolul numeric: „Teoria numerelor întregi a lui Kronecker este, dealtfel, intenabilă. După dînsul, un număr întreg ar fi o totalitate de simboluri numerice. Aceasta conduce la consecința absurdă că un popor care folosește alte simboluri numerice ar avea totodată alte numere întregi și că, așadar, aritmetica acestuia ar trata cu totul alte obiecte decît cele ale noastre, constituind deci o cu totul altă știință. Mai departe, am avea o multitudine finită de numere întregi, dat fiind că, în mod evident, pînă în prezent a fost etalată numai o multitudine finită de simboluri numerice iar din acestea se pot constitui numai un număr finit de totalități“ (*op. cit.*, p. 155).

⁹ Distincția va fi dezvoltată pe larg în „Despre sens și semnificație“. Expresiile diferite cărora le corespund unul și același lucru au sensuri diferite, dar au aceeași semnificație sau referință.

¹⁰ Acest întreg este valoarea funcției pentru argumentul considerat; cele trei expresii de mai sus, care desemnau numerele 3, 18, 132 le desemnau în calitate de valori ale uneia și aceleiași funcții, exprimată prin „ $2 \cdot ()^3 + ()$ “. Expresia care desemnează funcția este o „parte“ a expresiei care desemnează valoarea funcției. Separarea și prezentarea ei în mod autonom presupun mai mult decît o descompunere a expresiei în componente, presupun, anume, compararea mai multor expresii (care desemnează valori

ale aceleiași funcții pentru argumente diferite) în scopul *abstragerii* elementului lor comun.

¹¹ Semnul argumentului nu este parte a semnului funcției, însă *locul* pentru semnul argumentului *este* o parte a semnului funcției.

¹² Să observăm că ideea de *parcurs valoric* al funcției de un argument este introdusă prin intermediul unei definiții contextuale, apelînd în mod esențial la semnul identității. Frege a început prin a explica ce înseamnă că două funcții de un argument au același parcurs valoric, apoi a introdus notația pentru parcursul valoric. Noțiunea de *parcurs valoric* precizează și generalizează ideea de *grafic* al unei funcții, adică de corespondență stabilită între argumentele și valorile funcției. În dezvoltările contemporane, noțiunea de *parcurs valoric* corespunde ideii de *graf* al funcției: clasa tuturor perechilor ordonate al cărui prim element este argumentul funcției, iar al doilea element valoarea funcției pentru acel argument. Pentru funcții de n argumente, graful funcției se definește ca mulțimea tuturor șirurilor ordonate avînd $n+1$ elemente, în care primele n sînt posibilele argumente ale funcției iar ultimul este valoarea luată de funcție pentru un șir determinat de n argumente. Funcția însăși este definită (în cazul funcției de un singur argument) printr-un triplet de forma (A, B, Γ) , unde A este mulțimea din care funcția ia argumente, B este mulțimea din care funcția ia valori iar Γ este graful funcției. A este *mulțimea de plecare* a funcției, B este *mulțimea de sosire*, iar Γ este submulțime a produsului cartezian $A \times B$. Aceste precizări scot la lumină atît similitudinile cît și deosebirile ce există între abordarea fregeană și abordarea pe baza teoriei mulțimilor. Ultima abordare este extensională, în sensul că dacă două funcții se definesc prin intermediul unuia și aceluiași triplet (A, B, Γ) , ele sînt identice. Pentru Frege însă, deși aceste funcții au *același parcurs valoric*, ele însele rămîn totuși distincte, în cazul cînd expresiile care le desemnează au *sensuri distincte*.

Mai există și o altă deosebire esențială, care ne avertizează împotriva identificării parcursului valoric cu graful funcției. Dacă luăm, de exemplu, funcțiile de treapta întîi (a se vedea mai jos), pentru Frege aceste funcții sînt peste tot definite pe domeniul

universal al obiectelor. Această presupunere, combinată cu ceea ce Frege a numit mai sus o lege logică fundamentală, a condus la paradoxul lui Russell.

¹³ Pînă acum, Frege a precizat noțiunea de funcție din matematică. În continuare, el prezintă extinderea conceptului de funcție în domeniul logicii.

¹⁴ Frege înțelege propozițiile de identitate (egalitățile) ca desemnînd valoarea unei funcții de două argumente pentru un cuplu de argumente. Această valoare este o *valoare de adevăr*. Valorile de adevăr sînt Adevăratul și Falsul. În loc de „adevărat” se spune astăzi în mod curent „adevărul”. Am tradus fidel „das Wahre” al lui Frege prin „Adevăratul”. Această nuanță nu prezintă totuși o însemnătate deosebită; important este să înțelegem că aici „Adevăratul” este folosit ca substantiv, mai exact ca nume propriu al unui obiect abstract.

Funcțiile care iau ca valori valorile de adevăr și astfel încît aplicarea semnului lor la semnele argumentelor lor dă o propoziție avînd ca valoare de adevăr tocmai respectiva valoare a funcției se numesc astăzi, îndeobște, *funcții propoziționale*. Expresia funcției propoziționale este o *formă propozițională*. *Forma propozițională* redă alcătuirea propoziției din părți componente, prin aplicarea unor operații funcționale. Așadar, noțiunea de *formalizare* își găsește o explicație precisă în logica matematică pe baza noțiunii de *funcție logică*. A se vedea A. Church, *Introducere în logica matematică*, în volumul *Logică și filozofie*, Ed. Politică, 1966, pp. 157 și urm., 181 și urm. În legătură cu introducerea explicită a valorilor de adevăr în logică de către Peirce, a se vedea Church, *op. cit.*, p. 178, nota 67.

¹⁵ Conceptul se poate defini deci, în termeni mai noi, ca o funcție propozițională de un argument, acest argument fiind, totodată un obiect (în cazul conceptelor de treapta întâi). Înțelegerea conceptului ca funcție este unul din rezultatele fundamentale la care a ajuns Frege. Combinată cu cuantificarea, această modalitate de analiză a condus direct la construirea calculului predicatelor, partea cea mai importantă a logicii formale moderne.

¹⁶ Extensiunea conceptului, înțeleasă ca parcurs valoric al funcției care este conceptul, nu coincide cu ceea ce în logica tra-

dițională se numește extensiune sau sferă a conceptului. În înșiși termenii lui Frege, „sfera“ conceptului *F* este mulțimea tuturor obiectelor care cad sub conceptul *F*, adică mulțimea tuturor argumentelor pentru care funcția ia valoarea adevărat. Parcursul valoric al unei funcții nu este, riguros vorbind, o mulțime de argumente. Frege substituie vechii noțiuni de *sferă a conceptului* noțiunea sa de *parcurs valoric*. Între acestea două există totuși o conexiune intimă: condițiile de identitate pentru parcursuri valorice coincid cu condițiile de identitate pentru sfere, în înțelesul anterior al cuvântului. Cu alte cuvinte, la două concepte le corespund una și aceeași totalitate de argumente pentru care conceptele iau valoarea adevărat, dacă și numai dacă cele două concepte au unul și același parcurs valoric. Această împrejurare justifică tratarea fregeană a extensiunii conceptului.

¹⁷ De la analiza propozițiilor matematice, Frege trece la analiza propozițiilor oarecari; implicit, este sugerată relevanța logicii matematice pentru analiza structurii logice a limbajului natural.

¹⁸ Pentru a pune mai pregnant în evidență caracterul nesaturat al expresiei, în exemplul propus de Frege, traducerea a trebuit să capete o expresie mai greoaie: „Capitala pe care o are Imperiul german“, în loc de „Capitala Imperiului german“. În limba germană, descompunerea expresiei „die Hauptstadt des Deutschen Reichs“ în „die Hauptstadt des“ și „Deutschen Reichs“ evidențiază mai clar faptul că prima expresie este nesaturată. Frege scrie — și această observație a fost omisă din traducerea noastră — că el a atribuit primei părți, i.e. lui „die Hauptstadt des“ forma genitivului.

¹⁹ Compară cu „Concept și obiect“ (ediția de față, p. 290). Ceea ce este elementar nu poate fi definit.

²⁰ Această succintă remarcă este capitală pentru înțelegerea ontologiei subiacente analizei logice a lui Frege. Entitățile sînt de două categorii: obiecte și funcții. La rîndul lor, expresiile limbajului se vor împărți în expresii pentru funcții și expresii care desemnează obiecte; aceste din urmă expresii sînt intitulate *nume proprii*.

²¹ Propozițiile declarative *desemnează* valori de adevăr, sînt nume proprii ale Adevăratului sau Falsului.

²² După cum se vede, Frege admite, implicit, ideea unui univers al tuturor obiectelor; o consecință este faptul că numeroase expresii despre care am fi înclinați să spunem că nu au sens constituie, în viziunea logicianului german, expresii bine definite, avînd o semnificație și astfel și un sens. Frege a respins limitările antrenate de concepția „universului de discurs“, preconizată de către Boole și De Morgan, concepție restrictivă la care adera și contemporanul său, Ernst Schröder. În logica formală de astăzi, punctul de vedere al lui Frege nu a obținut succes de cauză, paradoxele relevînd caracterul „naiv“ al ipotezei că există un univers al tuturor obiectelor.

²³ Frege prezintă, în continuare, funcțiile de adevăr, cum sînt numite astăzi, precum și cuantorii.

²⁴ Frege distinge între funcția „afirmație“, cum mai este numită astăzi, funcție care ia ca valoare întotdeauna valoarea de adevăr a argumentului, și asertarea propoziției, operație căreia nu i se poate asocia vreo funcție de adevăr.

²⁵ Negația lui x este identică cu negația afirmației lui x și cu afirmarea negației lui x . Aici și mai jos, x este o variabilă în locul căreia putem substitui numele unui obiect oarecare, dar menirea funcției, în măsura în care este tocmai funcție de adevăr, va fi să descrie operații cu propoziții; propozițiile semnificînd valori de adevăr sînt astfel, în viziunea lui Frege, nume proprii. Funcțiile trebuind să fie definite peste tot, negația se aplică la orice obiect. Cf. și nota 21.

²⁶ Frege utilizează litera gotică x în calitate de ceea ce astăzi numim „variabilă legată“ iar litera x ca pe o „variabilă liberă“. Cuantificarea unei formule conținînd o variabilă liberă reclamă astfel folosirea unui alt sort tipografic de litere. Într-adevăr, variabilele libere și cele legate îndeplinesc funcții logice diferite. În lucrările mai recente de logica predicatelor, distincția vizată de Frege este menținută ferm, însă nu se mai folosesc sorturi de litere distincte. Urmînd această uzanță, formula pe care o scrie

Frege o vom transcrie, potrivit unui simbolism uzitat astăzi: $(x) f(x)$.

²⁷ Formula se poate transcrie prin: $\vdash (x) (x = x)$. Remarcăm că semnul „ \vdash ” al aserțiunii, uzitat în logica de astăzi, a fost preluat de la Frege.

²⁸ Transcrierea formulei este: $\sim (x)(x^2 = 1)$.

²⁹ În transcriere: $(x) \sim (x^2 = 1)$.

³⁰ În transcriere: $\vdash \sim (x) \sim (x^2 = 1)$. Sau, aplicînd cuantorul existențial: $\vdash (\exists x)(x^2 = 1)$.

³¹ În transcriere: $\vdash \sim (x) \sim (x \geq 0)$, respectiv $\vdash (\exists x)(x \geq 0)$.

³² În transcriere: $\vdash \sim (x) \sim (x < 0)$, respectiv $\vdash (\exists x)(x < 0)$.

³³ În transcriere: $\vdash \sim (x) \sim (x^3 - 3x^2 + 2x = 0)$.

³⁴ În transcriere: $\sim (x) \sim f(x)$, respectiv $(\exists x)f(x)$.

³⁵ Expresiile se transcriu prin: „ $\sim (x) \sim (x^2 = 1)$ ”,

„ $\sim (x) \sim (x \geq 0)$ ”, „ $\sim (x) \sim (x < 0)$ ”, „ $\sim (x) \sim (x^3 - 3x^2 + 2x = 0)$ ”.

³⁶ Frege a introdus în pasajul de mai sus funcția pe care astăzi o numim „implicație materială” și o concepem totodată ca avînd în calitate de argumente numai propoziții, nu obiecte arbitrare. Formula bidimensională

$\overline{\text{I}}_y^x$ se transcrie în notație lineară prin: $y \rightarrow x$ sau $y > x$ sau Cyx , ș.a.m.d.

³⁷ Utilizînd în locul literelor gotice litere din alfabetul latin (pentru a, b, c punem x , respectiv y și z) și folosind simbolul „ \rightarrow ” pentru funcția $\overline{\text{I}}$, formula se va transcrie prin:

$$(z)(y)\{f(z, y) \rightarrow [(x)(f(z, x) \rightarrow (y = x))]\}.$$

Formula exprimă proprietatea relației f de a fi o funcție (nu în înțelesul fregean al cuvintelor „relație” și „funcție”, ci în înțelesul lor din teoria mulțimilor), adică de a fi o relație univocă în al doilea membru al ei.

³⁸ Teorema diferențialei produsului, care este utilă în calculul integral, unde induce teorema integrării prin părți.

³⁹ Distincția este deci de ordin ontologic. — Trebuie observat că ierarhia fregeană a funcțiilor nu este însoțită de o ierarhizare a obiectelor și — poate de aceea — nu ajunge pînă la o veritabilă teorie a tipurilor iar ca atare nu s-a dovedit aptă să prevină apariția unei contradicții în sistemul formal pe care Frege l-a construit în *Grundgesetze der Arithmetik*.

DESPRE CONCEPT ȘI OBIECT

NOTIȚĂ INTRODUCȚIVĂ

Dacă „Funcție și concept” constituia trasarea ofensivă a unei distincții fundamentale într-o manieră neproblematică, articolul de față transformă o argumentație defensivă în prilej de adîncire a analizei prin prospectarea unor *dificultăți* de natură principială. În opusculul precedent, *scrutarea* structurilor lingvistice era un fir călăuzitor la capătul căruia se afla un răspuns pozitiv, descifrarea unui mister. În „Concept și obiect”, limbajul ca atare apare ca o piedică în înțelegerea pînă la capăt a unei distincții pe care el însuși o sugerase.

■ Nu avem sentimentul că am înțeles lucrurile pînă în adîncul lor dacă nu le-am dat nume, transformînd un act ostensiv ne-verbal în act de denumire. Pentru a vorbi despre un anumit concept trebuie mai întîi să-l denumim; apoi îi vom atribui însușiri, asociindu-l altor concepte. Dar nu se poate face aceasta așa cum am face despre un obiect oarecare, adică desemnîndu-l în calitate tocmai de „conceptul acesta”, fiindcă astfel l-am desemnat printr-un nume propriu și tocmai în calitate de obiect.

Benno Kerry, oponentul lui Frege, pune în cauză principiul de analiză trasat în *Fundamentele aritmeticii*: trebuie distins ferm între concept și obiect, aducînd împotriva principiului subtila observație că atunci cînd folosesc o expresie de genul „conceptul F”, prin însuși acest fapt dovedesc că distincția concept-obiect este relativă. Frege acceptă premisa criticii lui Kerry, dar inferă din ea concluzia opusă: „conceptul F” nu este un termen conceptual, ci un nume propriu, deci pentru a vorbi despre conceptul F va trebui să recurgem la altă modalitate de desemnare a conceptului, menținînd însă neslăbită distincția concept-obiect.

Retranșarea lui Frege pe pozițiile anterioare, definite deja în „Fundamentele aritmeticii” și dezvoltate apoi sistematic în „Funcție și concept”, i-a dictat aprofundarea unor aspecte importante ale concepției sale despre *concept* și *obiect*, *logică* și *limbă*.

Despre *concept*, Frege ne reamintește că avem trei criterii de

recunoaștere a acestuia. Recunoaștem, mai întâi, un concept prin faptul că expresia care îl desemnează admite articolul nehotărît sau alte particule care nu se pot lega de nume proprii: spunem, de pildă, „un om“, „toți oamenii“, „o planetă“. Apoi, îl recunoaștem prin faptul că expresia care îl desemnează este una predicativă, adică intră într-o propoziție în calitate de predicat enunțabil despre subiecte. Și, în fine, stăruiind asupra acestui caracter de nepredicativitate, ajungem la natura esențialmente predicativă nu numai a expresiei, dar și a conceptului însuși, natură predicativă în care recunoaștem un caz particular al nesaturării, al nevoii de întregire a entității-funcție. Dimpotrivă, ceea ce desemnează o expresie folosită cu articolul hotărît, în calitate de subiect gramatical al unei propoziții singulare, este o entitate saturată, autonomă, întregită: nu un concept, ci un obiect.

Logica însăși, în lumina concepției fregeene despre concept, își precizează câteva repere esențiale. Se lămurește, mai întâi, faptul că *predicativitatea conceptului* este un caracter logic original de care nu numai logica aristotelică, ci și aceea care nu întâmplător avea să se numească apoi: a *predicatelor*, are a da seamă. De la Aristotel și pînă la Wilhelm Wundt, contemporanul lui Frege, logicienii au descris și au încercat să explice cum este cu puțință ca unul să se spună despre mai mulți. Ideea predicativității conceptului va fi fost poate preluată de către Frege de la Wundt, așa cum sugerează editorii postumelor fregeene (Frege, *Nachgelassene Schriften*, 1969, p. 129, nota 2). Pe de altă parte, tot un interpret al operei lui Frege sugerează că intră în joc și înrîurirea exercitată de către Adolf von Trendelenburg care, la rîndul lui, se referea la O. F. Gruppe, pentru a evidenția substratul judicațional al conceptului (cf. Hans Sluga, *Frege and the Rise of Analytic Philosophy*, în „Inquiry“, 18, 4, 1975, p. 481). Wundt vorbea despre predicativitatea conceptului, despre faptul că acesta este partea predicativă a unei judecăți singulare al cărui subiect este partea variabilă a judecății. Nu știm dacă Frege îl va fi citit pe Aristotel, dar în schimb este cert că l-a citit pe Wundt. Oricum, concepția lui Frege se întîlnește în acest punct cu aceea a lui Wundt — care și ea vine de foarte departe — numai spre a o transmuta pe un alt făgaș. E o infuzie de matematism proaspăt într-o veche problemă

în care filosofia logicii a avut mult de dat și de luat de la filosofie pur și simplu.

Frege a mers mai departe decît Wundt prin faptul că a dedus din predicativitate modul adecvat de formalizare a conceptului: ca funcție. A formaliza nu înseamnă pur și simplu a înlocui cuvintele dintr-o propoziție prin simboluri, ci a abstrage elementul comun mai multor propoziții de aceeași formă. Or, comun tuturor propozițiilor singulare este faptul că în ele ceva se spune despre altceva de altă natură, conceptul se enunță despre un obiect. Esența conceptului rezidă în faptul că se poate enunța — în mod adevărat sau fals, dar în orice caz cu sens — despre *orice* obiect.

Pentru logică, Frege scoate de aici mai multe consecințe de prim ordin. Relația logică fundamentală este aceea a căderii unui obiect *sub* un concept. Relații logice cum sînt aceea de subordonare a unui concept față de un altul trebuie explicate pe baza acestei relații logice primordiale. Pe distincția între aceste două relații logice se clădește și distincția *proprietate-notă*; Frege statornicește înțelesul termenilor „proprietate” și „notă” prin intermediul a două definiții contextuale care pun în joc cele două relații. Un obiect cade *sub* un concept dacă și numai dacă gîndul exprimat în propoziția singulară corespunzătoare este adevărat. La rîndul lui, un concept poate cădea *înăuntrul* unui concept de o treaptă mai înaltă: relație logică analogă cu prima, însă distinctă și care, atunci cînd îmbracă forma unei judecăți singulare, nu se exprimă adecvat, adică în conformitate cu natura relației însăși. Într-adevăr, subiectul ei nu mai este un concept, ci un obiect *sui-generis*, desemnat de un nume propriu. Dar o asemenea relație poate fi exprimată și în propoziții de altă formă, așa cum se întîmplă, de exemplu, atunci cînd existența este predicată despre un concept.

O clarificare logică importantă, pe care o face Frege în aceeași ordine de idei, privește adevărata formă a propozițiilor universale sau particulare din logica aristotelică; structura lor autentică rezidă în raportarea logică a două concepte care stau în poziția de predicție; distincția subiect-predicat, sugerată de gramatica și logica tradițională, nu face decît să mascheze adevăratele relații logice dintre elementele gîndului. Ca atare, analiza logică trebuie

să pornească de la distincția concept-obiect, oglindită pe plan lingvistic în distincția nume propriu—termen conceptual.

Să ne întrebăm însă, încă odată: cum am ajuns, urmîndu-l pe Frege, la distincția concept-obiect? Răspunsul ne expediază către propoziția singulară ori către propoziția de identitate, formele cele mai simple care exprimă *gînduri complete*. Conceptul, fiind nesaturat, nu este decît o parte dintr-un întreg care nu poate fi descompus logic în fragmentele sale componente altfel decît în cel puțin un fragment saturat și în cel puțin unul nesaturat. Frege pare a sugera că conceptul este *abstras* de noi din contextul propoziției. Punctul de pornire îl constituie, așadar, nu conceptul, ci *gîndul* pe care îl exprimă propoziția. Acesteia din urmă i se va aplica deci analiza logică. Sinteza este însă primordială. În „Concept și obiect” presupoziția nu este explicitată suficient, dar întregul articol trebuie citit prin prisma afirmațiilor lui Frege în acest sens. Cităm, astfel, dintr-un text fregean datînd din perioada de amurg: „Eu nu pornesc... de la concepte, compunînd din acestea gîndul sau judecata, ci dobîndesc părțile de gînd prin descompunerea gîndului. Prin aceasta, scrierea mea conceptuală [*Begriffsschrift*] se deosebește de creații analoge ale lui Leibniz și ale contemporanilor săi, în pofida denumirii alese de mine, denumire care poate că nu este prea fericită” (*Nachgelassene Schriften*, vol. I, 1969, p. 273).

Limba este, la rîndul ei, pusă în joc de analiza fregeană. Structurile ei sînt în același timp exploatate, prospectate și denunțate. Am văzut cum Frege descifrează în structuri lingvistice și criterii gramaticale moduri esențiale de a fi ale entităților semnificate. Dar, împotriva unei naivități care tinde să identifice structura gramaticală cu aceea logică — cum se întîmplă, de exemplu, în cazul propozițiilor universale al căror subiect gramatical nu a fost înțeles drept ceea ce este: un predicat — Frege înțelege să avertizeze. Transparența structurilor lingvistice este adesea înșelătoare, lăsînd în obscuritate fondul logic. *Critica limbii* este premisa și rezultatul analizei logice. Asemenea observații ne întîmpină la tot pasul în scrierile lui Frege. Dar în „Concept și obiect” se face auzit pentru prima oară un sunet nou: Frege ne spune că înțelegerea cititorului trebuie să iasă în întîmpinarea explicațiilor sale de autor și că anumite lucruri

nu se lasă exprimate precis în limbajul obișnuit al filosofiei și al vieții de toate zilele, comunicarea lor fiind inevitabil neoficială, aluzivă și simpatetică. Ceea ce limbajul nu comunică însă altfel decât prin metafore și sugestii se relevă a fi tocmai alcătuirile lui intime, spre pildă felul de a fi neîntregit al unor expresii și semnificații. Limbajul simbolic nu poate face mare lucru în această privință; el poate manifesta cu claritate structura ascunsă, dar nu o poate spune. „Concept și obiect” anticipează deja *Tractatus logico-philosophicus*, dar wittgensteinismul lui Frege este numai de ordinul întâlnirilor fugitive; întregul context și însăși finalitatea considerațiilor lui Frege sugerează concluzii opuse. Căci nu „despre ceea ce nu putem vorbi trebuie să tăcem”, nu convocarea la tăcere filosofică este ceea ce vrea să obțină Frege, ci numai o punere în gardă împotriva naivităților necritice.

Și totuși, avertizând împotriva naivității filosofice, sugerînd că filosofia limbajului este critica limbajului, Frege nu a știut să meargă suficient de departe pe calea protejată împotriva capcanelor pe care ni le întinde limbajul. El nu a întrevăzut decât mult mai târziu potențialul de primejdii ascuns în dificultatea legată de obiectualizarea conceptului prin modul de desemnare. Dacă o expresie cum este „conceptul F” indică un obiect, nu înseamnă aceasta o dedublare primejdioasă a entităților și o punere în dependență a obiectului față de concept? Acea hipostaziere a conceptelor pe care Frege o evită, atunci cînd nu conferă conceptelor, funcțiilor autonomia, completitudinea obiectelor, intră totuși în sistemul lui pe calea dublării conceptelor prin obiecte.

Frege a sperat că dificultățile limbajului obișnuit vor fi evitate în limbajul său simbolic, unde nu este loc pentru expresii paradoxale de genul „conceptul F este un concept”. El s-a înșelat în cel mai dramatic chip. Hipostazierea lingvistică este o eroare filosofică plătită scump, chiar dacă scadența vine mai târziu, chiar dacă prilejul este diferit, în joc fiind nu conceptele, ci, de pildă, clasele.

Oponentul lui Frege, Benno Kerry, a avut într-adevăr dreptate: distincția dintre concept și obiect este relativă. Dar argumentația lui Kerry era slabă, în timp ce contraargumentația logicianului de la Jena în favoarea unei cauze pierdute rămîne formidabilă. Dusă pînă la capăt, critica limbii pe care o inițiază Frege

arată și ieșirea din labirint. Nu întâlnirea la jumătatea drumului, între exprimarea explicită și tăcere, nu metafora sugestivă, receptată cu bunăvoință, ci numai confruntarea permanentă a expresiei cu intenția și semnificația ne poate feri de primejdii. La sfârșitul vieții Frege a scris un text capital intitulat „Sursele cognitive ale matematicii și ale științelor matematice ale naturii“, în care, printre altele, hipostazierca lingvistică este denunțată în cei mai categorici termeni. Expresia „Conceptul stea fixă“ — scrie Frege — *nu* desemnează un obiect, cum pare să ne sugereze utilizarea articolului hotărît, ci „desemnează un concept (eine Begriffsbezeichnung ist) și stă astfel în opoziția cea mai netă cu orice nume propriu (*Nachgelassene Schriften*, p. 289). Avem aici numai manifestarea particulară a unei însușiri generale a limbii, cu consecințe fatale pentru gândire însăși, căci limba are tendința „de a crea obiecte cărora nu le corespunde vreun obiect“ (*idem*, p. 288). Limba, și nu un vorbitor izolat!

Cînd scria rîndurile de mai sus, efectuînd astfel o importantă corecție a traiectoriei sale filosofice din „Concept și obiect“, Frege știa foarte bine — și o spune explicit — că el însuși căzuse victimă iluziei hipostaziente în încercarea sa de a funda logic aritmetica. Nici o critică exegetică nu poate egala severitatea acestei retrodicții.

DESPRE CONCEPT ȘI OBIECT¹

Într-o serie de articole apărute în această revistă trimestrială, discutînd despre întuiție și despre procesul ei de elaborare psihică, Benno Kerry² s-a referit în mai multe rînduri la *Fundamentele aritmeticii* și la alte lucrări ale mele³, exprimîndu-și uneori acordul iar alteori dezacordul cu mine. Faptul nu poate decît să mă bucure și cred că cel mai bun mod de a-mi manifesta gratitudinea este de a relua discuția asupra punctelor pe care el le combate. Aceasta mi se pare cu atît mai necesar, cu cît poziția lui se bazează, cel puțin parțial, pe o neînțelegere a afirmațiilor mele despre concept, neînțelegere pe care o pot împărtăși și alții; pe de altă parte, chiar și abstracție făcînd de această împrejurare specială, problema este destul de importantă și dificilă pentru a reclama o analiză mai amănunțită decît aceea pe care am considerat-o oportună în *Fundamentele mele*.

Cuvîntul „concept“ este folosit în diferite moduri, cînd în sens psihologic, cînd în sens logic, iar uneori și într-o accepție confuză, care amestecă ambele sensuri. Această libertate o dată admisă, ea își găsește o limitare naturală în cerința ca, o dată adoptată o anumită accepție, ea să fie menținută. Eu am decis să păstrez în mod riguros o accepție pur logică. Problema dacă o anumită accepție este mai adecvată ca alta aș vrea să o las la o parte, ca fiind de mai mică importanță. Asupra terminologiei vom ajunge cu ușurință la un acord de îndată ce vom recunoaște că în cazul de față există ceva ce reclamă o denumire specială.

După părerea mea, neînțelegerea comisă de Kerry provine din faptul că acesta confundă fără să vrea accepția pe care o are pentru dinsul cuvîntul „concept“ cu accepția dată de mine. Astfel, apar lesne contradicții de care

nu modul în care folosesc eu cuvîntul „concept“ se face responsabil⁴.

Kerry contestă ceea ce el numește definiția mea a conceptului. De aceea, aș vrea să observ, în primul rînd, că explicația mea nu intenționează să constituie o definiție propriu-zisă. Nici nu se poate cere ca orice să fie definit, tot așa cum nu putem cere chimistului să descompună orice substanță. Ceea ce este elementar nu poate fi descompus, iar ceea ce este logic-elementar nu poate avea o definiție propriu-zisă. Or, ceea ce este logic-elementar nu ne este dat din capul locului în mai mare măsură decît ne sînt date cele mai multe dintre elementele chimice; la ceea ce este logic-elementar se ajunge abia prin intermediul unei activități științifice. Dacă s-a descoperit ceva simplu, sau dacă cel puțin provizoriu ceva trebuie să fie considerat simplu, vom avea de făurit o denumire în acest scop, întrucît limba nu conține de la bun început o expresie care să-i corespundă întocmai. Introducîndu-se un nume pentru ceva logic-simplu, o definiție nu este posibilă. Singura soluție este să dăm sugestii pentru ca cititorul sau auditorul să fie condus să înțeleagă cuvintele în sensul vizat⁵.

Kerry vrea să arate că distincția dintre concept și obiect nu este absolută. El spune: „Mai sus, ne-am exprimat părerea că relația dintre conținutul conceptului și obiectul conceptului este, într-o anumită privință, o relație cu totul specifică și ireductibilă; dar aceasta nu implică în nici un caz că proprietatea de a fi concept și proprietatea de a fi obiect s-ar exclude reciproc; această din urmă idee nu rezultă din prima, tot așa cum, de pildă, din ipoteza că relația tată-fiu ar fi ireductibilă nu urmează că un om nu poate fi în același timp tată și fiu (deși, firește, un om nu poate fi, de exemplu, tatăl celui al cărui fiu este)“.

Să pornim de la această comparație. Dacă ar exista sau ar fi existat ființe care să fie tați dar incapabile să fie fii, asemenea ființe ar fi, în mod evident, cu totul diferite de toți oamenii care sînt fii. Or, aici se întîmplă

ceva asemănător. Conceptul — așa cum înțeleg acest cuvânt — este predicativ*. Dimpotrivă, numele unui obiect, numele propriu, nu poate fi folosit în nici un fel în rolul de predicat gramatical⁶. Fără îndoială, acest lucru trebuie explicat, altfel el poate părea fals. Într-adevăr, oare nu putem spune despre un lucru că este Alexandru cel Mare, sau că este numărul patru, sau că este planeta Venus, la fel cum putem spune despre un lucru că este verde, sau că este mamifer? Dacă cineva gindește așa, el nu deosebește accepțiile cuvântului „este“. În ultimele două exemple, acest cuvânt este folosit în calitate de copulă, în calitate de simplu semn verbal al enunțării. Ca atare, acest cuvânt poate fi uneori înlocuit printr-o simplă terminație personală; să comparăm, de exemplu *dieses Blatt ist grün* și *dieses Blatt grünt*. Spunem atunci că ceva cade sub un concept și că predicatul gramatical desemnează aici acest concept. În primele trei exemple, pe de altă parte, „este“ e folosit la fel ca semnul egalității în aritmetică, pentru a exprima o ecuație**. În propoziția „Luceafărul de dimineață este Venus“ avem două nume proprii, „Luceafărul de dimineață“ și „Venus“, pentru același obiect. În propoziția „Luceafărul de dimineață este o planetă“ noi avem un nume propriu — „Luceafărul de dimineață“, și un nume de concept — „planetă“. Din punct de vedere lingvistic, ce-i drept, nu s-a întâmplat decât că „Venus“ a fost înlocuit prin „o planetă“; în fapt însă, relația a devenit cu totul alta. O ecuație este reciprocabilă; căderea unui obiect sub un concept este o relație ireciprocabilă. În propoziția „Lucea-

Și anume este semnificația unui predicat gramatical.

Eu folosesc cuvântul „egal“ și simbolul „=“ în sens de „aceleași cu“, „nu altul decât“, „identic cu“. Vezi și E. SCHRÖDER, *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (Leipzig, 1890), vol. I, § 1. Schröder trebuie să fie totuși criticat pentru că nu face distincție între cele două relații radical deosebite — relația de cădere, subsumare a unui obiect sub un concept și relația de subordonare a unui concept față de altul. Observațiile sale privitoare la *Vollwurzel* suscită de asemenea obiecții. Simbolul lui Schröder \Leftarrow nu este un simplu înlocuitor al copulei.

fărul de dimineață este Venus“, „este“, în mod evident, nu constituie doar simpla copulă, ci, prin conținutul său, este o parte esențială a predicatului, așa încît cuvîntul „Venus“ nu cuprinde predicatul în întregimea sa*. Se poate spune, în schimb: „Luceafărul de dimineață este nu altul decît Venus“; ceea ce înainte era concentrat în simplul „este“ se desfășoară aici în patru cuvinte separate, iar în „este nu altul decît“, cuvîntul „este“ constituie într-adevăr, de această dată, numai copula. Ceea ce se predică aici este deci nu Venus, ci nu altul decît Venus. Aceste cuvinte semnifică un concept, sub care, de bună seamă, cade un singur obiect. Un atare concept trebuie totuși să fie deosebit întotdeauna de obiect**. Avem aici un cuvînt, „Venus“, care nu poate fi niciodată predicat propriu-zis, deși el poate constitui o parte a unui predicat. Semnificația*** acestui cuvînt, așadar, nu se poate înfățișa niciodată ca un concept, ci numai ca un obiect⁷. Nici Kerry, desigur, nu ar contesta că ceva de acest gen există într-adevăr. Dar prin aceasta se admite o distincție a cărei recunoaștere prezintă o însemnătate capitală, distincția între ceea ce poate interveni numai ca obiect și orice altceva. Or, această distincție nu s-ar estompa nici dacă ar fi adevărat, așa cum crede Kerry, că există concepte care pot fi și obiecte. — Există într-adevăr cazuri care par să pledeze în favoarea acestei concepții. Eu însumi am arătat (în *Fundamente*, § 53, *ad fin.*) că un concept poate cădea sub un concept superior, ceea ce însă nu trebuie confundat cu subordonarea unui concept față de altul⁸. Kerry nu se referă la aceasta, ci aduce următorul exemplu: „Conceptul «cal» este un concept ușor de obținut“ și consideră că conceptul „cal“ este un obiect, și anume unul din obiectele care cad sub conceptul „concept ușor de obținut“. Așa este, într-adevăr! Cuvintele „con-

* Vezi lucrarea mea *Fundamentele*, § 66, notă.

** Vezi lucrarea mea *Fundamentele*, § 51.

*** Vezi articolul meu „Despre sens și semnificație“ („Über Sinn und Bedeutung“) care urmează să apară în curînd în „Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik“.

ceptul «cal»^{*} desemnează un obiect, dar tocmai de aceea ele nu desemnează un concept, în accepția pe care eu o dau acestui cuvînt. Faptul semnalat concordă pe deplin cu criteriul pe care l-am dat^{*} — și anume că articolul hotărît la singular indică întotdeauna un obiect, în timp ce articolul nehotărît însoțește un nume de concept.

Kerry susține că regulile logice nu se pot întemeia pe distincții lingvistice; dar propriul meu mod de procedură nu poate fi evitat în genere de acel care stabilește asemenea reguli; într-adevăr, nu ne putem înțelege altfel decît prin intermediul limbii, așa că în cele din urmă trebuie să ne bizuim întotdeauna pe faptul că ceilalți oameni înțeleg în linii mari cuvintele, flexiunile și construcția propozițiilor în același mod în care le înțelegem și noi. Așa cum am spus mai sus, eu nu am încercat să dau o definiție, ci numai să sugerez, în care scop am apelat la înțelegerea spiritului limbii germane. Foarte mult pledeză în favoarea mea faptul că există un acord atît de deplin între distincția lingvistică și distincția reală. În ceea ce privește articolul nehotărît, nu avem a observa probabil, nici o excepție de la regula noastră, în afara unor expresii ieșite din uz, cum ar fi *Ein edler Rat* [„Consilier“]. Lucrurile nu stau la fel de simplu în cazul articolului hotărît, în special la plural; dar criteriul meu nu se referă la acest caz. La singular, după cîte înțeleg, se ridică semne de întrebare numai atunci cînd un singular ia locul unui plural, ca în propoziția „turcul a asediat Viena“, „calul este patruped“. Aceste cazuri pot fi recunoscute cu atîta ușurință drept cazuri speciale, încît apariția lor nu afectează aproape deloc valoarea regulii noastre. Este clar că în prima propoziție „turcul“ este numele propriu al unui popor. A doua propoziție, de bună seamă, va fi considerată mai potrivit drept expresia unei judecăți universale, cum ar fi, de pildă, „toți caii sînt patrupede“ sau „toți caii ce au o constituție normală

^{*} Vezi și *Fundamente*, §§ 51, 66 notă, § 68, notă.

sînt patrupede“, lucru despre care vom mai discuta ulterior*. Kerry afirmă că criteriul meu este inadecvat; el susține că în propoziția „conceptul despre care vorbesc acum este un concept individual“ numele compus din cinci cuvinte semnifică în mod cert un concept; Kerry nu înțelege însă cuvîntul „concept“ în sensul în care este luat de mine, iar contradicția nu rezidă în stipulările făcute de mine. Nimeni totuși nu poate pretinde ca modul meu de exprimare să concorde cu cel al lui Kerry.

Nu putem să nu recunoaștem că aici, ce-i drept, ne izbim de un anume impediment lingvistic ce nu poate fi evitat atunci cînd spunem că conceptul cal nu este un concept**, în timp ce, de pildă, orașul Berlin este un oraș, iar vulcanul Vezuviu este un vulcan. Limba se găsește aici într-un impas care dă seama de abaterea de la

* În prezent, lumea pare dispusă să exagereze semnificația afirmației că diferitele expresii lingvistice nu sînt niciodată complet echivalente, că un cuvînt nu poate fi niciodată tradus în mod exact într-o altă limbă. S-ar putea merge — cine știe! — încă și mai departe, spunînd că același cuvînt nu este înțeles în exact același mod de către oamenii care folosesc aceeași limbă. Nu voi cerceta în ce măsură aceste afirmații sînt adevărate; aș vrea numai să subliniez că, cu toate acestea, expresii diferite au adesea un element comun, pe care îl numesc sens — iar în cazul special al propozițiilor, gînd. Altfel spus, nu trebuie omis că același sens, același gînd, poate fi exprimat în mod diferit; așadar, diferența nu privește în cazul de față sensul, ci numai înțelegerea, nuanța, coloratura gîndului fiind astfel în afara logicii⁹. Este posibil ca o anumită propoziție să furnizeze nu mai multă și nu mai puțină informație decît o altă propoziție; totodată, în pofida varietății limbilor, omenirea are un bagaj comun de gînduri. Dacă orice transformare a expresiei ar fi interzisă pe motivul că această transformare ar afecta și conținutul, logica ar fi pur și simplu scoasă din funcțiune; într-adevăr, cu greu ar putea fi dusă la capăt sarcina logicii, fără a ne strădui să recunoaștem gîndul în numeroasele sale înfățișări. Mai mult, toate definițiile ar trebui respinse, în acest caz, ca false.

** Ceva analog se întîmplă atunci cînd afirmăm despre propoziția „Acest trandafir este roșu“, că predicatul gramatical „este roșu“ aparține subiectului „acest trandafir“. Aici, cuvintele „Predicatul gramatical «este roșu»“ nu constituie predicatul, ci subiectul gramatical. Prin însuși faptul de a-l denumi în mod explicit un predicat, noi îl privăm de această proprietate.

uzanță¹⁰. Caracterul cu totul aparte al cazului nostru este arătat de Kerry însuși, prin intermediul ghilimelelor în care este pus cuvântul „cal“; eu folosesc în același scop literele cursive. N-a existat nici un motiv spre a sublinia cuvintele „Berlin“ și „Vezuviu“ într-un mod asemănător. În cadrul investigațiilor logice apare, nu o dată, nevoia de a enunța ceva despre un concept și de a exprima aceasta în forma obișnuită pe care o îmbracă aceste aserțiuni, respectiv de a face din ceea ce se enunță conținutul predicatului gramatical. În consecință, se poate aștepta ca semnificația subiectului gramatical să fie conceptul; însă conceptul ca atare nu poate juca acest rol, dată fiind natura lui predicativă, și de aceea el trebuie transformat mai întâi într-un obiect sau mai exact, el trebuie reprezentat printr-un obiect*, pe care noi îl desemnăm prin cuvântul „conceptul“, pe care îl punem în față; de exemplu:

„Conceptul *om* nu este vid“.

Aici, primele două cuvinte trebuie privite ca un nume propriu** care nu poate fi folosit predicativ mai mult decât „Berlin“ sau „Vezuviu“¹¹. Când spunem „Iisus cade sub conceptul *om*“, atunci (lăsând la o parte copula) predicatul este:

„ceva care cade sub conceptul *om*“,

iar aceasta semnifică același lucru ca:

„un om“.

Dar combinația de cuvinte

„conceptul *om*“

este numai o parte a acestui predicat.

Împotriva naturii predicative a conceptului s-ar putea obiecta că noi vorbim totuși despre un concept-subiect.

* Vezi *Fundamentele aritmeticii*, p. X. (În volumul de față, p. 37 — nota trad.).

** Spun că este nume propriu orice semn pentru un obiect.

Dar chiar și în asemenea cazuri, de exemplu, în cadrul propoziției

„toate mamiferele au sînge roșu“

natura predicativă* a conceptului nu poate fi ignorată; într-adevăr, în loc de aceasta se poate spune:

„ceea ce este un mamifer are sînge roșu“,

sau

„dacă ceva este mamifer, atunci are sînge roșu“¹².

Atunci cînd am scris *Fundamentele aritmeticii*, nu făcusem încă distincția între sens și semnificație** și ca atare reuneam în expresia „conținutul posibil de judecată“ ceea ce desemnăm acum în mod distinct prin cuvintele „gînd“ și „valoare de adevăr“. În consecință, nu mai accept integral explicația dată de mine acolo la p. 77, în ceea ce privește modul în care a fost formulată; concepția mea rămîne totuși, în esență, aceeași¹³. Putem spune în mod lapidar, luînd „subiect“ și „predicat“ în sens lingvistic: conceptul este semnificația unui predicat, obiectul este ceea ce nu poate fi niciodată întreaga semnificație a unui predicat, dar poate fi semnificația unui subiect. Trebuie observat aici că cuvintele „toți“, „fiecare“, „nici unul“, „unii“ sînt puse înaintea termenilor conceptuali. În propozițiile afirmative și negative universale sau particulare, noi exprimăm relații între concepte și folosim cuvintele de mai sus pentru a indica tipul special al relației¹⁴. Așadar, logic vorbind, ele nu trebuie asociate mai strîns cu termenii conceptuali care le succed, ci trebuie

* Ceea ce numesc aici natură predicativă a conceptului este tocmai un caz special al nevoii de întregire, al nesaturării, pe care am prezentat-o ca trăsătura esențială a unei funcții în lucrarea mea *Funcție și concept (Funktion und Begriff)*, (Jena, 1891). Acolo era greu să se evite expresia „funcția $f(x)$ “, deși se ridica de asemenea dificultatea că această expresie nu are ca semnificație o funcție.

** Vezi studiul meu „Despre sens și semnificație“, în „Zeitschrift für Phil. und phil. Kritik“.

raportate la propoziție în ansamblul ei. Aceasta se constată cu ușurință în cazul negației. Dacă în propoziția:

„toate mamiferele sînt animale terestre“

expresia „toate mamiferele“ ar exprima subiectul logic al predicatului *sînt animale terestre*, atunci, pentru a nega întreaga propoziție, ar trebui să negăm predicatul: „nu sînt animale terestre“. În loc de aceasta, particula „nu“ trebuie pusă în fața lui „toate“, ceea ce arată că „toate“ se raportează logic la predicat¹⁵. Pe de altă parte, noi negăm propoziția „conceptul *mamifer* este subordonat conceptului *animal terestru*“, negînd predicatul: „nu este subordonat conceptului *animal terestru*“.

Dacă reținem faptul că, potrivit modului meu de exprimare, expresii cum sînt „conceptul F“ nu desemnează concepte, ci obiecte, cele mai multe din obiecțiile lui Kerry se prăbușesc din capul locului. Dacă el crede (p. 281) că eu aș fi identificat conceptul cu extensiunea conceptului, el se înșală. Eu nu am făcut decît să-mi exprim părerea că în cadrul expresiei „numărul care revine conceptului F este extensiunea conceptului *echinumeric cu conceptul F*“, cuvintele „extensiunea conceptului“, puteau fi înlocuite prin „conceptul“. Se va observa că aici cuvîntul „concept“ este folosit cu articolul hotărît. Dealtfel, aceasta nu este decît o observație pasageră, pe temeiul căreia nu am clădit nimic.

De vreme ce Kerry nu reușește să umple prăpastia dintre concept și obiect, s-ar putea încerca o valorizare a propriilor mele indicații în acest sens. Am arătat că aserțiunea numerică cuprinde un enunț despre un concept^{*}; eu vorbesc despre proprietăți enunțate despre un concept și admit că un concept poate cădea sub un concept mai înalt^{**}. Am spus că existența este o proprietate a unui concept. Sensul în care înțeleg aceasta devine clar pe baza unui exemplu. În propoziția „există cel puțin o

* *Fundamentele aritmeticii*, § 46.

** *Ibidem*, § 53.

rădăcină pătrată din 4" nu se afirmă ceva despre numărul determinat 2, și nici despre -2 , ci despre un concept, *rădăcina pătrată din 4*, și anume se afirmă că acesta nu este vid. Dar dacă același gând îl exprim astfel: „Conceptul *rădăcină pătrată din 4* este realizat“, atunci primele cinci cuvinte formează numele propriu al unui obiect, și tocmai despre acest obiect se enunță ceva. Trebuie observat însă că ceea ce se enunță aici nu coincide cu ceea ce s-a enunțat despre concept¹⁶. Faptul va surprinde numai pe acel ce nu reușește să vadă că un gând poate fi analizat în mai multe feluri, astfel încît în rol de subiect sau predicat apare cînd ceva cînd altceva. Gîndul însuși nu determină încă ceea ce trebuie privit ca subiect. Spunînd: „subiectul acestei judecăți“, noi nu desemnăm nimic determinat, atîta timp cît nu indicăm o anumită modalitate de analiză. De regulă, analiza este legată de o anumită formulare. Dar să nu uităm totuși că diferite propoziții pot exprima unul și același gând. De exemplu, gîndul pe care îl avem în vedere ar mai putea fi considerat și ca o afirmație despre numărul 4:

„Numărul patru are proprietatea că există ceva a cărui rădăcină pătrată este“.

Limba are mijloace de a prezenta ca subiect cînd una cînd alta din părțile gîndului. Unul din cele mai obișnuite mijloace este distincția dintre forma activă și forma pasivă. Ca atare, nu este imposibil ca un anumit mod de analiză a unui gînd să-l prezinte ca o judecată singulară, un alt mod ca o judecată particulară, iar un al treilea ca o judecată universală. De aceea, nu trebuie să ne mire faptul că una și aceeași propoziție poate fi concepută ca un enunț despre un concept și de asemenea, ca un enunț despre un obiect; trebuie însă să observăm că ceea ce se enunță diferă de la caz la caz. În propoziția „există cel puțin o rădăcină pătrată din 4“ nu este permis să înlocuim cuvintele „rădăcină pătrată din 4“ prin „conceptul *rădăcină pătrată din 4*“; cu alte cuvinte, enunțul care conține conceptului nu convine obiectului. Deși propoziția

noastră nu prezintă conceptul ca un subiect, ea enunță ceva despre el; ea poate fi înțeleasă ca exprimând căderea unui concept sub un concept mai înalt*. Dar astfel distincția între obiect și concept nu este cituși de puțin estompată. În primul rînd, observăm că propoziția „există cel puțin o rădăcină pătrată din 4” nu infirmă natura predicativă a conceptului. Într-adevăr, putem spune: „există ceva care are proprietatea că înmulțit cu el însuși dă 4”. Ca atare, ceea ce se enunță aici despre un concept nu se poate enunța niciodată despre un obiect; un nume propriu nu poate fi niciodată o expresie predicativă, deși el poate fi parte a unei atari expresii. Nu vreau să spun că ar fi fals să afirmăm despre un obiect ceea ce este afirmat aici despre concept; vreau să spun că este imposibil, lipsit de sens, să afirmăm aceasta. Propoziția „există Iulius Caesar” nu este nici adevărată, nici falsă, ci fără sens; ce-i drept, propoziția „există un om al cărui nume este Iulius Caesar” are un sens, dar aici avem iarăși un concept, așa cum lasă să se vadă articolul nehotărit. Nu altul este cazul propoziției „una este Viena”. Să nu ne lăsăm înșelați de faptul că limba folosește adesea un același cuvînt cînd ca nume propriu, cînd ca desemnare a unui concept. În cazul de față, numeralul indică prezența unui nume de concept; „Viena” este aici un nume de concept, deopotrivă cu „oraș imperial”¹⁷. Folosind în acest sens cuvîntul, putem spune: „Triestul nu este o Vienă”. Pe de altă parte, dacă înlocuim numele propriu format din primele cinci cuvinte ale propoziției „conceptul rădăcină pătrată din 4 este realizat” prin „Iulius Caesar”, obținem o propoziție care are sens, dar este falsă; faptul de a fi realizat, în înțelesul dat aici cuvîntului, se poate enunța cu adevărat numai despre obiecte de un gen cu totul special, și anume despre obiecte care pot fi desemnate de nume proprii avînd forma „conceptul F”¹⁸. În cadrul propoziției noastre inițiale, po-

* În *Fundamente* un asemenea concept l-am numit concept de ordinul doi; în lucrarea mea „Funcție și concept” l-am numit concept de treapta a doua, așa cum fac și aici.

sibilitatea de înlocuire a cuvintelor „conceptul *rădăcină pătrată din 4*” diferă radical de posibilitatea de înlocuire a cuvintelor „*rădăcină pătrată din 4*”; altfel spus, semnificațiile celor două expresii sînt esențial diferite.

Ceea ce am ilustrat aici printr-un anumit exemplu este valabil în cazul general; comportarea conceptului este esențial predicativă pînă și în cazul cînd ceva se enunță despre dînsul; în consecință, și în acest din urmă caz el nu poate fi înlocuit decît tot printr-un concept, niciodată printr-un obiect. Conceptele de treapta a doua, sub care cad concepte, sînt esențial distincte de conceptele de treapta întii, sub care cad obiecte. Relația unui obiect față de conceptul de treapta întii sub care cade se deosebește de relația — analogă, desigur — a unui concept de treapta întii față de un concept de treapta a doua. Pentru a marca în egală măsură deosebirea și asemănarea, am putea spune, eventual, că în timp ce un obiect cade *sub* un concept de treapta unu, un concept cade *înăuntrul* unui concept de treapta doi. Astfel, distincția între un concept și un obiect este menținută cît se poate de ferm.

Legat de aceasta, intervine ceea ce am spus în *Fundamentele aritmeticii*, § 53, despre accepția pe care o dau cuvintelor „proprietate” și „notă”. Prezentarea lui Kerry îmi dă prilejul să mă întorc încă o dată la această temă. Cuvintele de mai sus servesc pentru a semnifica relații, în propoziții ca „ Φ este o proprietate a lui Γ ” și „ Φ este o notă a lui Ω ”. Potrivit terminologiei mele, ceva poate fi în același timp o proprietate și o notă, dar nu a unuia și aceluiași. Conceptele sub care cade un obiect le numesc proprietăți ale acestui obiect¹⁹, astfel că

„a fi Φ este o proprietate a lui Γ ”

nu este decît un alt mod de a spune că

„ Γ cade sub conceptul lui Φ ”.

Dacă obiectul Γ are proprietățile Φ , X și Ψ , eu le pot strînge în una singură, Ω , astfel încît va fi același lucru

dacă spun că Γ are proprietatea Ω sau dacă spun că Γ are proprietățile Φ , X și Ψ . Spun atunci că Φ , X și Ψ sînt note ale conceptului Ω și, în același timp, proprietăți ale lui Γ . Este limpede că relațiile lui Φ față de Γ și față de Ω sînt total diferite, și că, drept consecință, trebuie să apelăm la denumiri diferite. Γ cade sub conceptul Φ ; dar Ω , care este el însuși un concept, nu poate cădea sub un concept de treapta întîi Φ , ci poate sta într-o relație analogă numai cu un concept de treapta doi. Pe de altă parte, Ω este subordonat lui Φ .

Să luăm un exemplu. În loc de a spune:

„2 este un număr pozitiv“ și
 „2 este un număr întreg“ și
 „2 este mai mic ca 10“

mai putem spune:

„2 este un număr întreg pozitiv mai mic ca 10“.

Aici,

a fi un număr pozitiv,
a fi un număr întreg,
a fi mai mic ca 10

apar ca proprietăți ale obiectului 2 și totodată ca note ale conceptului

număr întreg pozitiv mai mic ca 10²⁰.

Acesta nu este nici număr pozitiv, nici număr întreg, nici mai mic ca 10. El este subordonat, într-adevăr, conceptului *număr întreg*, însă nu cade sub el.

Să comparăm cele de mai sus cu afirmațiile lui Kerry din al doilea articol al său, la p. 424: „Prin numărul 4 înțelegem rezultatul combinării aditive a lui 3 și 1. Obiectul conceptual al conceptului dat prin aceasta este individul numeric 4, un număr bine definit în șirul numerelor naturale. Acest obiect poartă în sine în mod evident, notele menționate în conceptul lui și nu admite vreo altă notă în afara acestora, cu condiția de a ne abține — așa

cum sîntem și obligați — să numărăm ca *propria* ale obiectului infinitatea relațiilor sale cu toate celelalte numere individuale; în mod similar, *Numărul 4* este rezultatul combinării aditive a lui 3 și 1^{*}.

Constatăm de la prima vedere că distincția mea între proprietate și notă este aici complet estompată. Kerry distinge aici între un număr 4 și *Numărul 4*. Trebuie să mărturisesc că această deosebire este de neînțeles pentru mine. Numărul 4 trebuie să fie un concept; *Numărul 4* trebuie să fie un obiect conceptual, și nimeni altul decît individul numeric 4. Nu trebuie să mai demonstrăm faptul că ceea ce avem aici nu este distincția mea între concept și obiect. S-ar putea crede că ceea ce întrevede aici Kerry — într-un mod foarte obscur — ar fi distincția mea între sensul și semnificația cuvintelor „numărul 4”^{*}. Dar numai despre semnificație se poate vorbi ca despre rezultatul combinării aditive a lui 3 și 1.

Cum urmează, așadar, a fi înțeles cuvîntul „este” în propozițiile „numărul 4 este rezultatul combinării aditive a lui 3 și 1” și „*Numărul 4* este rezultatul combinării aditive a lui 3 și 1”? Este acest cuvînt numai o copulă, sau el ne ajută să exprimăm o ecuație logică? În primul caz, ar fi trebuit spus „rezultat”, nu „rezultatul”, iar propozițiile ar fi sunat, de pildă, astfel:

„Numărul 4 este un rezultat al combinării aditive a lui 3 și 1”;

„*Numărul 4* este un rezultat al combinării aditive a lui 3 și 1”.

În acest caz, obiectele pe care Kerry le desemnează prin:

„numărul 4” și „*Numărul 4*”

ar cădea amîndouă sub conceptul

rezultat al combinării aditive a lui 3 și 1.

* Vezi articolul meu „Despre sens și semnificație”, citat mai sus.

Dar atunci, singura întrebare ar fi prin ce se deosebesc aceste obiecte. Eu folosesc aici cuvintele „obiect“ și „concept“ în modul care îmi este familiar. Aș formula ceea ce Kerry pare să încerce a spune, după cum urmează:

„Numărul 4 are acele și numai acele proprietăți care sînt note ale conceptului

rezultat al combinării aditive a lui 3 și 1“.

În acest caz, sensul primei dintre cele două propoziții ale noastre l-aș exprima astfel:

„A fi un număr 4 este tot una cu a fi un rezultat al combinării aditive a lui 3 și 1“.

Dar atunci, ceea ce am presupus mai sus că vroia să spună Kerry ar mai putea fi redat și astfel:

„Numărul 4 are acele și numai acele proprietăți care sînt note ale conceptului *număr 4*“.

Nu discutăm aici dacă această afirmație este sau nu adevărată. Totodată, am putea omite sublinierea specială, prin folosirea literelor cursive, a articolului hotărît în expresia „*Numărul 4*“.

Dar în cadrul acestor tentative de interpretare am presupus că în cel puțin una din cele două propoziții, cuvintele „rezultat“ și „număr 4“ erau folosite cu articolul hotărît numai din nebagare de seamă. Dacă luăm cuvintele așa cum se prezintă, le putem privi numai ca avînd sensul unei identități logice²¹, ca de pildă:

„Numărul 4 nu este nimic altceva decît rezultatul combinării aditive a lui 3 și 1“.

Folosirea articolului hotărît în cuvîntul „rezultat“ este justificată logic în cazul de față numai dacă: 1. se știe că există un asemenea rezultat și 2. se știe că există nu mai mult decît unul singur. Atunci, expresia desemnează într-adevăr un obiect și trebuie considerată ca un nume propriu. Dacă ambele noastre propoziții ar trebui privite ca ecuații logice, atunci — întrucît membrii dreپți sînt

identici — ar urma de acolo că numărul patru este *Numărul 4* sau, dacă preferăm, că numărul 4 nu este nimic altceva decât *Numărul 4*; în care caz, distincția sugerată de Kerry s-ar dovedi inconsistentă. Eu însă nu îmi propun să relev aici contradicțiile expunerii sale. Modul în care el înțelege cuvintele „obiect” și „concept” nu este, strict vorbind, ceea ce mă interesează aici; eu încerc numai să pun într-o lumină mai clară propriul meu mod de folosire a acestor cuvinte și să arăt, cu acest prilej, că în orice caz modul meu de folosire diferă de cel al lui Kerry, indiferent dacă acel din urmă mod este sau nu consistent.

Nu contest cătuși de puțin dreptul lui Kerry de a folosi cuvintele „concept” și „obiect” într-un mod propriu, cu condiția ca și el să-mi respecte același drept și să admită că prin denumirile mele am ajuns la o distincție de cea mai mare însemnătate. De bună seamă, aici, în calea comunicării dintre mine și cititor se ridică un obstacol cu totul aparte. O anumită constrângere lingvistică face ca expresiile pe care le folosesc, atunci când sînt luate literal, să-mi trădeze uneori gîndul, întrucît, deși ceea ce am în vedere este un concept, ceea ce este denumit este un obiect. Sînt pe deplin conștient de faptul că în aceste cazuri se presupune că cititorul ar fi gata să-mi iasă în întîmpinare la jumătatea drumului, înțelegînd *cum grano salis* afirmațiile mele²².

Cineva ar putea crede că această dificultate a fost creată în mod artificial, că nu se impune să luăm în considerație ceva atît de dificil ca ceea ce eu numesc concept și, în sfîrșit, că am putea considera, alături de Kerry, căderea unui obiect sub un concept ca o relație în care ceva ar putea interveni cînd ca obiect, cînd ca un concept. Cuvintele „obiect” și „concept” ar servi atunci numai pentru a indica pozițiile diferite în cadrul acestei relații. Se poate proceda astfel; dar cel ce își închipuie că dificultatea este astfel evitată se înșală amarnic. Dificultatea este numai deplasată; într-adevăr, nu toate părțile unui gînd pot fi închise în sine; cel puțin una dintre ele tre-

buie să fie nesaturată sau predicativă, alifel părțile nu s-ar îmbina²³. De exemplu, sensul expresiei „numărul 2” nu se îmbină cu cel al expresiei „conceptul *număr prim*” fără un liant. Un asemenea liant îl folosim în propoziția „numărul 2 cade sub conceptul *număr prim*”. El rezidă în cuvintele „cade sub”, care reclamă o întregire în două moduri — printr-un subiect și un acuzativ — și numai această nesaturare a sensului lor permite folosirea lor ca liant. Numai când ele au fost întregite în aceste privințe obținem un sens complet, un gând. Spun că asemenea cuvinte sau expresii semnifică o relație. Or, în cazul relației ne întâmpină aceeași dificultate pe care încercam s-o evităm în cazul conceptului. Într-adevăr, cuvintele „relația de cădere a unui obiect sub un concept” nu desemnează o relație, ci un obiect, iar raporturile dintre cele trei nume proprii „numărul 2”, „conceptul *număr prim*”, „relația de cădere a unui obiect sub un concept” sînt la fel de delicate ca și raporturile dintre primele două; oricum le-am alătura, tot nu obținem o propoziție. Ca atare, constatăm lesne că dificultatea provenită din nesaturarea unei părți a gândului poate fi, de bună seamă, deplasată, dar nu și evitată. „Închis în sine” și „nesaturat” sînt, desigur, simple expresii metaforice, dar în cazul de față eu nu urmăresc și nu sînt în măsură să dau altceva decît simple indicații aluzive.

Poate că lucrurile vor fi înțelese cu mai multă ușurință în cazul cînd cititorul consultă lucrarea mea „Funcție și concept”. În problema a ceea ce se numește funcție în analiză, ne ciocnim de același obstacol; or, o analiză mai pătrunzătoare va evidenția faptul că acest obstacol ține de însăși esența problemei, este înrădăcinat în natura limbii noastre; nu putem evita o anumită inadecvare a expresiei lingvistice și de aceea nu ne mai rămîne altceva decît să devenim conștienți de acest lucru și să ținem întotdeauna seama de el.

¹ Articolul poartă în original titlul „Über Begriff und Gegenstand“; a apărut în „Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie“, 16, 1892, pp. 192—205. O redactare preliminară a articolului s-a păstrat printre manuscrisele lui Frege și a fost editată în Gottlob Frege, *Nachgelassene Schriften* (hrsg. von Hans Hermes, Friedrich Kambartel, Friedrich Kaulbach; Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1969), pp. 96—127, sub titlul: *Über den Begriff der Zahl/2, Eine kritische Auseinandersetzung mit Kerry*.

² Benno Kerry a predat filosofia la Universitatea din Strassburg pînă la moartea sa, în 1889. Autor al cărții *System einer Theorie der Grenzbegriffe-Ein Beitrag zur Erkenntnistheorie* (Leipzig und Wien, 1890) editată postum.

³ Kerry a publicat începînd din 1855 în revista în care replica lui Frege a apărut în 1892, un ciclu de 8 articole sub titlul general *Über Anschauung und ihre psychische Verarbeitung*.

⁴ În *Fundamentele aritmeticii*, Frege stipulase ca un prim principiu călăuzitor distincția netă între psihologic și logic, între subiectiv și obiectiv. Ca atare, pentru el conceptul nu trebuie confundat cu o reprezentare, cu „prelucrarea psihică a intuiției“, așa cum procedau psihologii. Totuși, ascuțișul criticii lui Frege nu este îndreptat aici împotriva psihologismului, tema dezbătută fiind caracterul relativ (Kerry) sau absolut (Frege) al distincției concept-obiect.

⁵ În „Funcție și concept“ se părea totuși că fusese sugerată o definiție a conceptului, luîndu-se ca punct de pornire noțiunea nedefinită de funcție, precum și noțiunea de valoare a funcției pentru un argument dat: un concept este o funcție care întotdeauna (= pentru orice argument) asumă ca valoare o valoare de adevăr. Faptul că aceste idei nu sînt introduse într-un cadru formal-axiomatic nu permite totuși să decidem dacă este într-adevăr așa. Oricum, dificultatea de care va trebui să se țină seamă nu constă atît în bine cunoscutul *anägke stenai*, necesitatea de a ne

opri în fața ideilor primitive, cît în acea particularitate a limbii pe care Frege o relevă mai jos: transformarea conceptului în obiect, atunci cînd încercăm să vorbim despre el denumindu-l. Această particularitate, legată de nesaturarea unor expresii, este înrădăcinată în nesaturarea entităților desemnate.

⁶ Predicativitatea conceptului este una din temele mari ale filosofiei tradiționale a logicii. Contribuția lui Frege se înscrie pe linia unei tradiții glorioase, care începe cel puțin de la Platon și Aristotel.

În contextul de față, predicativitatea este înțeleasă ca însușire a conceptului de a fi semnificația unei expresii predicative. Conceptul nu poate fi decît predicat, va arăta Frege de-a lungul articolului său. O expresie care apare în calitate de subiect gramatical nu poate fi o expresie predicativă, iar o expresie predicativă nu poate să constituie un subiect gramatical al unei propoziții. Predicativitatea este, așadar, legată de relația logică fundamentală în care se găsește conceptul: raportarea față de obiectele individuale. Obiectele cad sub concept sau cad în afara lui. Un concept este corect atunci cînd pentru orice obiect s-a definit dacă el cade sau nu sub concept (a se vedea și „Funcție și concept“).

Predicativitatea conceptului își găsește expresia, în aceeași ordine de idei, în afirmația lui Frege din *Fundamentele aritmeticii*: „Pentru mine, conceptul este un posibil predicat al unui conținut judicabil singular, în timp ce obiectul este un posibil subiect al acestuia“ (§ 66, cf. prezentul volum, p. 114). Atrăgînd atenția asupra acestui pasaj, Ignacio Angelelli, urmîndu-l pe Heinrich Scholz, vede aici o sugestie kantiană; Kant, într-adevăr, scrie în *Critica rațiunii pure*: „Conceptele însă se raportează, ca predicate ale unor judecăți posibile, la o reprezentare oarecare despre un obiect încă nedeterminat“ (Ed. Științifică, 1969, p. 103). A se vedea Ignacio Angelelli, *Studies on Gottlob Frege and traditional philosophy*, Reidel, 1967, pp. 150—191, îndeosebi 155, 157, 189.

Predicativitatea conceptului este un caz particular al nesaturării sau nevoii de întregire a funcțiilor. Despre aceasta Frege vorbește ceva mai jos.

⁷ Pentru Frege, deci, atunci cînd „este“ nu exprimă relația de identitate și, ca atare, nu leagă între ele două nume proprii în

cadrul unei propoziții de identitate, copula trebuie înglobată în expresia predicativă. Propoziția singulară exprimă prin însăși forma sa relația dintre un obiect și un concept sub care primul cade, exprimă nemijlocit, așadar, predicativitatea conceptului; ea se va scinda prin analiză logică, în două părți: nume propriu și expresie predicativă (predicat gramatical). Dacă în cadrul propoziției figurează „este” (particulă care, cum a arătat Frege, în unele cazuri poate lipsi), atunci copula va fi o parte a predicatului gramatical.

⁸ Așa cum se va preciza mai jos, expresia faptului că un concept cade sub un concept superior constituie sau o propoziție singulară, în care subiectul gramatical va fi totuși nu o denumire a primului concept, ci a unui obiect *ad-hoc*, sau o propoziție în care primul concept este exprimat în această calitate, dar tocmai de aceea propoziția nu mai exprimă o judecată singulară de forma celor studiate în logica tradițională. În ceea ce privește subordonarea unui concept față de altul, ea se exprimă îndeobște în forma unei propoziții universale.

⁹ Ca și în „Despre sens și semnificație”, Frege distinge aici între sensul unei expresii și nuanțele pe care diferite expresii sinonime le conferă, în diferite contexte dintr-o limbă dată, și cu atât mai mult în diferite limbi, unuia și aceluiași sens.

¹⁰ În repetate rânduri, Frege vorbește despre imperfecțiunile logice ale limbii ca despre o sursă de erori pe care numai analiza logică adecvată și utilizarea unui sistem de notații în genul unui *Begriffsschrift* le poate contracara. De data aceasta, situația paradoxală la care ajunge limbajul obișnuit nu pare a fi corectabilă: potrivit lui Frege, este vorba de a intui pe baza unor indicații metaforice impasul la care ajunge limba, înțelegerea cititorului venind în întâmpinarea sugestiilor avansate de filosof. Pe de altă parte, folosirea unui simbolism corect nu dă loc la asemenea impasuri. Acest geu de critică a limbajului anticipează demersul wilgensteinian din *Tractatus*.

¹¹ Frege ne va rămâne pină la sfârșit dator cu un răspuns la întrebarea — pe care poate că el însuși nu și-a pus-o: ce anume desemnează un nume propriu cum este „Conceptul *om*”? — Pornind de la exemplul furnizat mai sus de către Frege însuși:

„Conceptul *om* nu este vid”. Ignacio Angelelli (*op. cit.*, p. 171) avansează ipoteza că întrucât a nu fi vidă este proprietate a unei clase, denotatul necunoscut al expresiei „Conceptul *F*” este *clasa* corespunzătoare acelu concept.

¹² Trecînd la analiza celor patru forme de propoziții categorice cu care se ocupă silogistica aristotelică, Frege își propune să arate că în cuprinsul lor termenii generali desemnează concepte; aceasta este valabil nu numai pentru termenul-predicat, ci și pentru termenul-subiect (subiect, în accepția tradițională a cuvîntului). Mai întîi el arată că pretinsul subiect al unei propoziții de forma „Toți *S* sînt *P*” este în fapt predikat al unor obiecte indicate în mod indefinit, propoziția transcriindu-se în „tot ce este *S* este *P*”, sau „dacă ceva (orice) este *S*, atunci este *P*”. În teoria cuantificării, formula care exprimă această înțelegere a funcționării conceptelor în calitate de predicate, este de genul $(x)(S(x) \rightarrow P(x))$.

¹³ Cf. mai sus, nota 6.

¹⁴ Spre deosebire de propozițiile singulare, care exprimă relația logică fundamentală de cădere a unui obiect sub un concept.

¹⁵ Fapt pe care formalizarea unei asemenea propoziții în logica predicatelor îl pune nemijlocit în evidență. Propoziția „toate mamiferele sînt animale terestre” se exprimă printr-o formulă ca $(x)(S(x) \rightarrow P(x))$, iar negația acestei propoziții este $\sim (x)(S(x) \rightarrow P(x))$.

¹⁶ În propoziția „Există cel puțin o rădăcină pătrată din doi” se enunță ceva despre conceptul *rădăcină pătrată din doi*, dar: 1) ceea ce se enunță nu este exprimat printr-o expresie care ar fi predikatul gramatical al propoziției de mai sus, 2) acela despre care se enunță nu este desemnat printr-un subiect gramatical și 3) propoziția de mai sus, în ansamblu, nu este de forma subiect-predicat. Lucrurile devin încă mai evidente dacă observăm o formulă ca $(\exists x)A(x)$, care descrie structura logică a tuturor propozițiilor de aceeași formă ca a propoziției de mai sus: expresia care desemnează conceptul *despre care* se enunță proprietatea existenței îl desemnează tocmai ca pe un concept, dar îl desemnează înăuntrul unui întreg, iar *ceea ce se enunță* despre acel concept nu este desemnat de un predikat gramatical. Așadar,

se poate enunța ceva despre altceva, fără ca enunțul să lege un subiect gramatical cu un predicat propozițional.

În propoziția „Conceptul *rădăcină pătrată* din 4 este realizat” distingem în schimb un subiect și un predicat, dar subiectul de aici nu desemnează conceptul despre care s-a enunțat ceva în prima propoziție iar predicatul nu desemnează ceea ce acolo se enunța, nu însă prin intermediul unei expresii predicative.

¹⁷ În *Fundamentele aritmeticii* (cf. indeosebi § 46), Frege stabilise că o aserțiune numerică enunță ceva despre un concept. În măsura în care „Una este Viena” („Viena este unică”) este și o aserțiune numerică, ea spune că numărul care revine unui concept este unu.

¹⁸ Argumentația lui Frege nu pare stringentă, cel puțin dacă ne ghidăm după intuiția lingvistică. Ar fi mai firesc să considerăm că o propoziție ca „Iulius Caesar este realizat” nu are sens, deși din punct de vedere sintactic este corect construită. Prin aceasta s-ar abandona însă presupoziția de bază a logicii fregeene, și anume admiterea unui domeniu al tuturor obiectelor. În momentul în care renunțăm la această presupoziție — sub presiunea paradoxelor — putem concede lesne că „este realizat” are sens numai atunci când se enunță despre concepte.

¹⁹ Să însemne aceasta că „proprietate” și „concept” sînt expresii sinonime? Împărțirea fregeană a entităților extralingvistice și non-psișice în obiecte și funcții, conceptele și relațiile fiind cazuri de funcții, pare să sugereze imperios o asemenea concluzie. De asemenea, pledează în aceeași direcție faptul că cele două expresii pot fi utilizate ca sinonime în variate contexte, *salva veritate et sensu*. Nu însă în toate contextele! Spunem că un obiect *are* proprietăți, însă *cade* sub concepte; a spune că un obiect cade sub proprietățile sale este neobișnuit, dar a spune că un obiect *are* concepte frizează absurdul. Tot astfel, este impropriu să spunem că argumentele admit funcții; funcțiile, dimpotrivă, admit argumente. Uzul limbii ne atrage deja atenția asupra faptului că „proprietate” și „concept” nu sînt sinonime, dar că orice context în care apare una din expresii se poate parafraza într-un context (sinonim?) în care apare cealaltă, și anume într-un context nu neapărat de aceeași formă. A cunoscut Frege această

distincție? El o utilizează în nenumărate rînduri (chiar și în articolul de față, imediat mai jos) dar nu o menționează ca atare. Oricum, dacă el nu a făcut caz de o asemenea distincție, nici nu a abuzat în direcție platoniciană de umbrirea ei. Conceptele și obiectele sînt două genuri de entități, însă nu două genuri de realități.

²⁰ „Proprietate“ și „notă“ nu sînt entități distincte; clarificarea semnificației acestor expresii impune considerarea contextelor în care apar. Se ajunge la concluzia că distincția între proprietate și notă, în opoziție cu aceea între concept și obiect, este legată de distincția între două relații logice în care intră un același concept.

²¹ *Logische Gleichung*: ecuație logică. În fapt, o propoziție de identitate.

²² Dificultatea nu constă în aceea că conceptul nu poate fi denumit; contra acestei interpretări se poate aminti că, potrivit lui Frege, un termen conceptual, un nume de concept („Begriffswort“, *nomen appellativum*, „Begriffszeichen“) desemnează conceptul ca atare (și nu sfera acestuia). Dificultatea se manifestă în faptul că atunci cînd, de exemplu, spunem „conceptul *Cal* este predicativ“ vorbim despre un obiect, în pofida intenției de a ne referi la un concept, expresia „conceptul *Cal*“ fiind *nomen proprium* nu *nomen appellativum*. Într-un cuvînt, dificultatea rezidă în faptul că încercăm a desemna un concept prin intermediul unui subiect gramatical. Un asemenea obstacol nu este însă insurmontabil; pasul pe care cititorul este convocat să-l facă în întîmpinarea lui Frege constă în a evita emiterea unor propoziții ca aceea de mai sus; /putem *menționa* un concept determinat numai printr-o expresie predicativă, dar nu-i putem atribui predicatul predicativității așa cum un predicat s-ar atribui unui subiect logic, desemnat de un subiect gramatical. Predicativitatea unui anume concept se manifestă direct în *utilizarea* lui, iar *exprimarea* predicativității acelui concept trebuie ocolită, evitînd îmbrăcarea ei în forma propoziției singulare. O putem totuși exprima indirect, de exemplu constatînd că expresia predicativă desemnează respectivul concept în contextul unor propoziții.

Totodată, se observă că propozițiile „orice concept este un concept“, „orice concept este predicativ“ ș.a. sînt scutite de asemenea dificultăți. Spre deosebire de „Conceptul *Cal*“, „Concept“ este el însuși un nume predicativ, se poate folosi cu articolul nehotărît, desemnează o funcție. Trebuie să ne abținem însă de la inferarea unei propoziții singulare cum este „Conceptul *Cal* este un concept“: *non sequitur*. A vorbi deci despre predicativitatea, nesaturarea conceptului *în genere* nu conduce la vreo dificultate deosebită; impasul trebuie localizat la nivelul cazurilor particulare, al fiecărui concept în parte.

²³ În nesaturare, predicativitate, nevoia de întregire a conceptului, F. Kaulbach sesizează pe drept cuvînt „pătrunderea unei anumite intenționalități în teritoriul logicii“, o anumită atenuare a distincției rigide pe care Frege o trasează între realitatea muabilă și conținut logic pur identic sieși, gînd. Caracterizarea fregeană a conceptului ca funcție, ca element „nesaturat“ și „cerînd o întregire“ îl prezintă „ca pe un gen de energie logică (ένεργεια în sensul lui Aristotel)“. „Conceptul — scrie în continuare F. Kaulbach — „cere“ o întregire, așa cum, bunăoară, predicatul „... este un număr prim“ aspiră după un subiect de felul lui „trei“. De predicat se leagă o intenție, care permite legarea inteligibilă a subiectelor potențiale ale propozițiilor întru unitatea unui gînd, așa cum acesta își găsește în propoziția „trei este un număr prim“ exprimarea sa. Prin aceasta însă, operațiile unificatoare ale subiectului se dovedesc, în însuși domeniul de vîrf al logicii, de neevitat“ (F. Kaulbach, *Einleitung, III: Der neue Ansatz und die geometrische Erkenntnisquelle*, în: Gottlob Frege, *Nachgelassene Schriften*, vol. I, p. XXIX).

CE ESTE O FUNCȚIE ?

NOTIȚĂ INTRODUCȚIVĂ

Grăbiți, de obicei, să ajungă la rezultate, matematicienii nu stăruie asupra începuturilor; obținerea unor teoreme fructuoase asupra funcțiilor, de pildă, rămîne pentru unii singura activitate importantă — covîrșitor mai importantă decît elucidarea semnificației cuvîntului „funcție”. Aceasta este valabil și pentru „variabilă”, „număr”, „spațiu”. Investigarea fundamentelor matematicii a atras însă atenția că efortul de lămurire a începuturilor este în măsură cel puțin să *rafineze* consumul și producția de adevăruri matematice, dacă nu chiar să-l potențeze puternic. Și totuși, contrastul dintre tendința de lărgire și tendința de adîncire însoțește constant matematica de azi, nu mai puțin ca aceea de ieri.

Demersul acestui mic eseu fregean stă sub semnul mentalității acelor matematicieni cărora nici demonstrațiile cele mai glorioase nu le aduc deplina satisfacție, cît timp nu sînt întovărășite de clarificarea noțiunilor fundamentale.

Clarificare, și nu definire propriu-zisă; fiindcă, pentru Frege, ideea de „funcție” este indefinibilă, ca logic-elementară. Dar în jurul unei idei primare, în absența unei definiții, se pot crea confuzii, după cum, pe de altă parte, este loc și pentru lămuriri fundamentale.

Frege critică unele confuzii comune, asociate de folosirea cuvintelor „variabilă” și „funcție” în matematici. Manualele moderne din ziua de azi aflate sub semnul teoriei mulțimilor au reușit să le înlăture, dar dicționarele de uz curent le mai păstrează încă, semn al înrădăcinării lor profunde. Atunci cînd Frege discută, deci, explicațiile aduse de matematicianul E. Czuber, trebuie subînțeles faptul că el critică explicațiile uzuale ale acestor noțiuni.

Observațiile pe care le face Frege sînt în primul rînd de ordin strict *logic* și au valoarea unei paradigme pentru activitatea logicianului: ele vizează folosirea cuvintelor cu o rigoare cît mai mare, în așa fel încît conotațiile intuitive ale cuvintelor să justi-

face efectiv punerea lor în joc. Sugestiile ademenitoare care într-un fel „rimează” cu conținutul chestionat dar în fapt îl redau inadecvat, trebuie înlăturate. Astfel, cuvîntul „variabilă” a fost sugerat de aplicațiile practice ale analizei, abstras din studiul *mărimilor variabile*, însă asociația între cuvintele „variabilă” și „variație” întunecă esența matematică a chestiunii, sugerînd în mod nefericit că ar exista „numere variabile”, așa cum există într-adevăr mărimi variabile și așa cum există, pe de altă parte, expresii cu semnificație variabilă, în dependență de contextul utilizării lor.

La fel, esența funcției va trebui desprinsă cu grijă din agregatul haotic al explicațiilor care amestecă înțelesuri deosebite, confundînd expresia funcției cu expresia valorii funcției pentru un argument nedeterminat, sau confundînd șirul valorilor unei funcții pentru argumente distincte cu variația unei entități matematice, sau, în fine, expresia funcției cu însăși funcția etc. Această esență rezidă în punerea în corespondență potrivit unei legi. Iar cuvîntul lege — atrage atenția Frege — „indică tocmai generalitatea”. Așadar, o funcție nu este un număr, de pildă, sau vreo altă entitate cu caracter obiectual.

Tentativele confuze de explicare împotriva cărora Frege își îndreaptă ascuțișul observațiilor sale își trag obîrșia din lacune — pe care le și alimentează — ale notației curente pentru funcții. În notația pentru funcții se poate întrezări totuși esența veritabilă a funcției ca entitate nu variabilă, însă „nesaturată”. Iar aici, explicațiile lui Frege se suprapun acelor pe care eseurile anterioare „Funcție și concept”, „Despre concept și obiect” ni le-au făcut deja familiare, ele culminînd cu pledoaria în favoarea unei ideografii apte să redea articulațiile logice ale îmbinării funcției cu argumentul.

În comparație cu cele două articole amintite mai sus, eseul lui Frege subliniază și precizează conceperea esenței funcției ca *punere în corespondență potrivit unei legi a tuturor obiectelor* față de unele (în cazul funcțiilor de treapta întâi, de un argument). Demersul lui Frege clarifică o idee pusă deja în circulație în prima jumătate a secolului trecut de către matematicianul Dirichlet, idee așezată pe fundamente mai abstracte prin înțelegerea modernă a funcției ca aplicație (Dedekind, 1886). Dar o deo-

sebire adâncă, ireductibilă, subzistă: pentru Frege, noțiunea de *funcție* aparține logicii, nu unei teorii a claselor sau a mulțimilor. Așa cum scrie Jean Largeault: „După Dirichlet, o funcție era o «lege de corespondență» între elementele a două clase. Frege respinge această concepție, întrucât ea presupune admiterea anteriorității claselor față de funcții. Frege utilizează, dimpotrivă, funcțiile pentru a defini clasele și acceptă funcțiile în sistemul său ca entități indefinibile și inanalizabile” (Jean Largeault, *Logique et philosophie chez Frege*, Paris-Louvain, 1970, p. 470). Logiciizarea funcției impune ca ea să fie peste tot definită, adică să admită orice argument din domeniul universal al obiectelor, ceea ce conferă abordării fregeene o anumită rigiditate.

CE ESTE O FUNCȚIE?¹

Semnificația cuvîntului „funcție“^{*} în analiză nu este nici astăzi mai presus de orice dubiu, cu toate că acest cuvînt este folosit de multă vreme pe scară largă. În definiții întîlnim două expresii care se repetă mereu, uneori combinate iar alteori în mod separat, și anume aceea de expresie a calculului și aceea de variabilă. Se observă, de asemenea, fluctuații ale accepției acestui termen, prin funcție înțelegîndu-se cînd ceea ce determină modul de dependență — sau poate modul de dependență însuși —, cînd variabila dependentă.

De la o vreme, cuvîntul „variabilă“ este preponderent în definiții. Dar însuși acest cuvînt reclamă imperios o explicație. Orice variație decurge în timp. În consecință, analiza ar avea de-a face cu un proces temporal, întrucît ia în considerație variabile. În fapt însă, analiza nu are de-a face cu timpul; aplicabilitatea sa la fenomenele temporale este irelevantă pentru esența chestiunii. Analiza are aplicații și în geometrie, unde timpul nu intră deloc în considerație. Aceasta este una din principalele dificultăți pe care le întîmpinăm în mod repetat, ori de cîte ori vrem să mergem de la exemple la însăși esența chestiunii. Într-adevăr, de îndată ce încercăm să indicăm o variabilă, ne vom ciocni de ceva ce variază în timp și ca atare nu aparține analizei pure². Și totuși, dacă în genere variabilele sînt obiecte ale analizei, trebuie să putem prezenta o variabilă care nu presupune nici un element străin aritmeticii.

Dacă însăși variația suscită, așadar, o dificultate, o nouă dificultate ne întîmpină de îndată ce ne întrebăm ce anume variază. Răspunsul pe care îl căpătăm mai întîi este: o mărime. Să căutăm un exemplu. Putem spune că

^{*} Discuția noastră se va limita la funcții de un singur argument.

o bară constituie o mărime, dat fiind că este lungă. Orice variație pe care o suferă bara sub raportul lungimii sale, de exemplu prin încălzirea ei, se petrece în timp; or, nici barele, nici lungimile nu sînt obiecte ale analizei pure. Această tentativă de a indica o mărime variabilă înăuntrul analizei se soldează cu un eșec; și exact în același fel sînt condamnate la eșec mai multe tentative; într-adevăr, mărimile lungimilor, suprafețelor, unghiurilor, maselor nu sînt nici ele obiecte ale aritmeticii. Dintre toate mărimile, aritmeticii îi aparțin numai numerele. Or, această știință omite să specifice prin măsurarea căror mărimi au fost obținute numerele în cazurile particulare și tocmai de aceea aritmetica admite cele mai variate aplicații. Întrebarea noastră este atunci: sînt oare variabilele analizei numere variabile? Ce altceva ar putea fi ele, de vreme ce în genere ele trebuie să aparțină analizei? Cum se face însă că aproape niciodată nu spunem „număr variabil“, dar, pe de altă parte, spunem adesea „mărime variabilă“? Această din urmă expresie pare mult mai acceptabilă decît „număr variabil“; într-adevăr, privitor la ultima expresie se ridică întrebarea: există oare numere variabile? Oare fiecare număr în parte nu-și conservă fără variație proprietățile sale? Ni se va replica, desigur, că 3 și π sînt în mod evident numere invariabile, sînt constante, dar mai există și numere variabile. Atunci, de exemplu, cînd vorbesc despre „numărul care dă lungimea în milimetri a acestei bare“, eu desemnez un număr, iar acesta este o variabilă, deoarece bara nu-și păstrează întotdeauna aceeași lungime; așadar, folosind aceeași expresie, eu am desemnat un număr variabil. Să comparăm exemplul de mai sus cu următorul. Atunci cînd spun „regele acestei țări“ eu desemnez un om. Acum zece ani, regele acestei țări era un bătrîn, iar acum regele acestei țări este un tînăr. Așadar, cu această expresie am desemnat un om care era un bătrîn, iar acum este un tînăr. Aici trebuie să fie o eroare. Expresia „regele acestei țări“ fără menționare a timpului nu desemnează în genere vreun om; dacă însă se adaugă o mențiune temporală ea poate *desemna* în

mod univoc un anumit om; dar atunci, această mențiune temporală este un element constitutiv necesar al expresiei iar pentru o mențiune diferită a timpului vom obține o expresie diferită. Așadar, cele două propoziții ale noastre nu au nicidecum același subiect al enunțării. La fel, expresia „numărul care dă lungimea în milimetri a acestei bare“ nu desemnează în genere nici un număr, în absența mențiunii temporale. Dacă se adaugă o mențiune temporală, se poate desemna astfel un număr, de pildă numărul 1 000; acesta este însă invariabil. O altă mențiune temporală produce o expresie diferită, care poate acum să desemneze un număr diferit, să spunem 1 001. Dacă spunem: „Acum o jumătate de ceas numărul care dădea lungimea în milimetri a acestei bare era un număr cub; în clipa de față, numărul care dă lungimea în milimetri a acestei bare nu este cub“, subiectul enunțării noastre nu este unul și același³. Numărul 1 000 nu a crescut pînă la 1001, ci a fost înlocuit prin acesta din urmă. Sau poate că numărul 1000 va fi fiind același cu numărul 1001, numai că și-a schimbat înfățișarea? Dacă ceva variază, noi avem în același obiect o succesiune de proprietăți, de stări diferite. Dacă acel ceva nu ar fi același, nu am avea un subiect despre care să putem enunța variația. O bară se dilată prin încălzire. În cursul acestui proces ea rămîne aceeași. Dacă, în schimb, o vom scoate și o vom înlocui printr-o bară mai lungă, nu am putea spune că s-a dilatat. Un om îmbătrînește; dar dacă nu l-am putea recunoaște totuși ca pe un același om nu am avea nimic despre care să putem enunța îmbătrînirea. Să aplicăm acestea în cazul numărului. Ce anume rămîne același, atunci cînd un număr variază? Nimic! Așadar, un număr nu variază; într-adevăr, nu avem nimic despre care am putea enunța variația⁴. Un număr cub nu se transformă niciodată într-un număr prim, iar un număr irațional nu devine niciodată rațional.

Așadar, nu există număr variabil, ceea ce este confirmat și de faptul că nu avem nume proprii pentru numere variabile. Încercarea noastră de a folosi expresia

„numărul care dă lungimea în milimetri a acestei bare“ ca o denumire a unui număr variabil a dat greș. Dar nu folosim noi oare „ x “, „ y “, „ z “ pentru a desemna numere variabile? Acest mod de a vorbi este într-adevăr răspîndit; dar literele de mai sus nu sînt nume proprii ale unor numere variabile în modul în care „2“ și „3“ sînt nume proprii ale unor numere constante; într-adevăr, numerele 2 și 3 se deosebesc între ele într-un anume mod, pe care îl putem indica precis; prin ce se disting însă variabilele despre care s-a pretins că sînt desemnate prin „ x “ și „ y “? Iată ce nu putem spune. Nu putem indica proprietățile pe care le are x , nici proprietățile deosebite pe care le are y . Dacă în genere asociem ceva acestor litere, aceeași reprezentare vagă va corespunde ambelor. Acolo unde apar preținse deosebiri este vorba de aplicații; dar în cazul de față nu ne referim la acestea. Întrucît nu putem concepe fiecare variabilă în specificitatea ei, nu putem nici să atribuim variabilelor nume proprii.

Domnul E. Czuber⁵ a încercat să preîntîmpine unele din dificultățile pe care le-am semnalat*. Pentru a elimina timpul, el definește variabila ca un număr nedeterminat. Dar există oare numere nedeterminate? Putem oare împărți numerele în determinate și nedeterminate? Oare oameni nedeterminați există? Nu se cere ca orice obiect să fie determinat? Dar oare nu este nedeterminat numărul n ? — Eu nu cunosc numărul n . „ n “ nu este numele propriu al vreunui număr, determinat sau nedeterminat⁶. Și totuși, uneori vorbim despre „numărul n “. Cum este cu putință aceasta? O asemenea expresie trebuie considerată într-un context. Să luăm un exemplu: „dacă numărul n este par, atunci $\cos n\pi = 1$ “. Aici, numai întrebul are un sens, nu condiția luată în sine sau consecința luată în sine. La întrebarea dacă numărul n este par nu se poate răspunde; la fel, nu se poate răspunde la întrebarea dacă $\cos n\pi = 1$. Pentru a se da un răspuns, s-ar cere ca „ n “ să fie numele propriu al unui număr, iar

* *Vorlesungen über Differential-und Integralrechnung* (Teubner, Leipzig), 1, § 2.

atunci acest număr ar fi în mod necesar un număr determinat. Noi scriem litera „ n ” pentru a viza generalitatea⁷. Aceasta presupune ca, înlocuind-o prin numele unui număr, atât propoziția-condiție cât și propoziția-consecință să primească un sens⁸.

Fără îndoială, putem vorbi aici despre nedeterminare; dar „nedeterminat” nu este aici un adjectiv pentru „număr”, ci este un adverb, de exemplu pentru verbul „a indica”. Nu se poate spune că „ n ” desemnează un număr nedeterminat, dar putem spune într-adevăr că el indică în mod nedeterminat numere. Și așa se întâmplă ori de câte ori sînt folosite în aritmetică litere, cu excepția puținelor cazuri (π , e , i) cînd acestea intervin în calitate de nume proprii; dar atunci ele desemnează numere determinate invariabile. Prin urmare, nu există numere nedeterminate, iar tentativa în acest sens a domnului Czuber constituie un eșec.

În al doilea rînd, el încearcă să remedieze deficiența legată de faptul că nu putem concepe fiecare variabilă în parte într-un mod specific. El numește totalitatea valorilor pe care le poate lua o variabilă domeniul variabilei, și spune: „Variabila x contează ca definită dacă pentru orice număr real pe care îl indicăm se poate determina dacă acesta aparține sau nu domeniului ei”. Variabila contează ca definită; dar este ea într-adevăr așa? Întrucît nu există numere nedeterminate, să definim un număr nedeterminat e o imposibilitate. Domeniul este prezentat ca notă distinctivă a variabilei; dar atunci, pentru același domeniu ar trebui să avem aceeași variabilă. În consecință, în ecuația „ $y=x^2$ ”, y ar fi aceeași variabilă ca și x , în cazul cînd domeniul lui x ar fi cel al numerelor pozitive⁹.

Trebuie să considerăm că această tentativă eșuează, cu atât mai mult cu cît expresia „o variabilă primește o valoare” este cu totul nebuloasă. O variabilă trebuie să fie un număr nedeterminat. Or, cum ajunge un număr nedeterminat să primească un număr, de vreme ce, așa cum am văzut, valoarea este un număr? Nu cumva un

om nedeterminat primește și el un om determinat? În alte privințe, într-adevăr, noi spunem că un obiect primește o proprietate; aici, numărul trebuie să joace ambele roluri; în calitate de obiect, el este numit variabilă sau mărime variabilă, iar în calitate de proprietate el este numit valoare. De aceea, oamenii preferă cuvîntului „număr“ cuvîntul „mărime“, iluzionîndu-se în privința faptului că mărimea variabilă și valoarea pe care, așa cum se pretinde, cea dintîi o primește, ar fi în esență unul și același lucru, că în acest caz nu am obținut un obiect care primește succesiv diferite proprietăți și că de aceea nu poate fi vorba despre o variație.

În ceea ce privește variabilele, rezultatele noastre sînt următoarele. Mărimile variabile trebuie desigur admise, însă ele nu aparțin analizci pure. Numere variabile nu există. Cuvîntul „variabilă“ nu are astfel o justificare în analiza pură.

Cum ajungem acum de la variabilă la funcție? În esență, lucrurile se vor petrece întotdeauna la fel și de aceea vom urma expunerea domnului Czuber, care scrie (§ 3):

„Dacă oricărei valori a variabilei reale x care aparține la domeniul acesteia i-am pus în corespondență un număr determinat y , atunci y în general este de asemenea definit ca variabilă și numit *funcție de variabila reală x* . Această situație se exprimă printr-o ecuație de forma $y = f(x)$ “¹⁰.

Observăm mai întîi că y este numit număr determinat, în timp ce, pe de altă parte, fiind o variabilă, el trebuia să fie un număr nedeterminat. Dar y nu este un număr nici determinat, nici nedeterminat; numai semnul „ y “ a fost atașat în mod incorect unei pluralități de numere, iar după aceea se vorbește despre el ca și cum ar fi un număr unic. Mai simplu și mai clar ar fi să prezentăm lucrurile după cum urmează: fiecărui număr dintr-un domeniu al lui x i se pune în corespondență un număr; totalitatea acestor numere o numesc domeniul lui y . Natural, avem aici un domeniu al lui y , dar nu avem un y

despre care să putem spune că ar fi o funcție de variabila reală x .

Așadar, delimitarea domeniului apare a fi neesențială în raport cu esența funcției. Dar atunci de ce nu am adopta din capul locului ca domeniu totalitatea numerelor reale sau totalitatea numerelor complexe, inclusiv numerele reale? Miezul problemei se află însă cu totul în altă parte, și anume, este ascuns în cuvîntul „pus în corespondență”. Într-adevăr, cum pot să constat dacă numărul 5 este pus în corespondență cu numărul 4? Întrebarea nu poate primi răspuns, dacă nu o întregim într-un fel sau altul. Și totuși, potrivit explicației pe care o dă domnul Czuber, lucrurile se prezintă ca și cum pentru oricare două numere era determinat din capul locului, dacă primul este sau nu este pus în corespondență cu al doilea. Din fericire, domnul Czuber adaugă următoarea observație:

„Definiția de mai sus nu afirmă nimic cu privire la legea de corespondență, lege care este indicată în modul cel mai general de *caracteristica* f ; această lege poate fi stabilită în cele mai diverse moduri“.

Așadar, punerea în corespondență are loc conform unei legi și se pot concepe diferite legi de acest fel. Dar atunci expresia „ y este funcție de x ” nu are nici un sens dacă nu este întregită prin menționarea legii după care decurge punerea în corespondență. Aceasta constituie o eroare în definiție. Or, tocmai legea pe care această definiție o prezintă ca nefiind dată este lucrul principal. Observăm că acum variabilitatea a dispărut în întregime din cîmpul vederii noastre, în timp ce generalitatea intră în raza atenției noastre; într-adevăr, cuvîntul „lege” indică tocmai generalitatea¹¹.

Deosebiriile dintre legile de punere în corespondență vor fi legate de deosebiriile dintre funcții și ele nu mai pot fi înțelese ca fiind de ordin cantitativ. Este suficient să ne gîndim la funcțiile algebrice, la funcția logaritm, la funcțiile eliptice, spre a ne convinge că aici sînt puse în joc deosebiri calitative¹²; un motiv în plus pentru a nu de-

fini funcțiile ca variabile. Dacă ele ar fi variabile, funcțiile eliptice ar fi variabile eliptice.

Modul nostru general de a exprima o atare lege de punere în corespondență este o ecuație în care litera „ y ” stă în partea stângă, în timp ce în partea dreaptă apare o expresie matematică compusă din numere, semne de calcul și litera „ x ”, cum ar fi:

$$„y = x^2 + 3x”$$

Funcția a fost definită, într-adevăr, ca fiind o asemenea expresie de calcul. În ultimul timp s-a considerat că acest concept este prea restrâns¹³. Dar inconvenientul semnalat ar putea fi evitat cu ușurință prin introducerea unor noi semne în limbajul simbolic al aritmeticii. Mai greu cîntărește o altă obiecție: fiind un grup de semne, o expresie a calculului nici nu aparține aritmeticii. Teoria formală care prezintă semnele ca fiind obiectul acestei științe o pot considera ca fiind definitiv infirmată de critica mea din volumul doi al cărții mele *Grundgesetze der Arithmetik*¹⁴. Distincția dintre semne și lucrul semnificat nu a fost întotdeauna trasată precis, astfel că prin expresie a calculului (*expressio analytica*) s-a înțeles pe jumătate și ceea ce constituie semnificația expresiei. Or, ce desemnează „ $x^2 + 3x$ ”? Strict vorbind, nimic; într-adevăr, litera „ x ” nu face decît să indice numere, dar nu le și desemnează. Dacă înlocuim „ x ” cu un numeral obținem o expresie care desemnează un număr, și astfel nu avem nimic nou. Ca și „ x ” însuși, „ $x^2 + 3x$ ” nu face decît să indice. Aceasta poate avea loc în scopul exprimării generalității, așa cum se întîmplă în cazul propozițiilor

$$„x^2 + 3x = x \cdot (x + 3)”,$$

$$„dacă $x > 0$, atunci $x^2 + 3x > 0$ ”.$$

Dar cum rămîne atunci cu funcția? Lucrurile se prezintă ca și cum funcția nu s-ar putea înțelege nici ca însăși expresia de calcul și nici ca ceea ce constituie semnificația expresiei. De fapt însă nu ne-am abătut prea

mult de la drumul cel drept. Fiecare din expresiile „sin 0“, „sin 1“, „sin 2“ semnifică un anumit număr; dar avem o parte constitutivă comună „sin“, în care constatăm că a fost desemnată esența proprie a funcției sinus. Acest „sin“ ar corespunde celui „f“ despre care domnul Czuber spune că ar indica legea, trecerea de la „f“ la „sin“, ca și aceea de la „a“ la „2“, fiind o trecere de la un semn care indică la un semn care desemnează. Dacă ar fi așa, atunci „sin“ ar semnifica o lege. Natural, lucrurile nu stau întocmai așa. Legea ni se pare a fi exprimată mai curînd în ecuația „ $y = \sin x$ “, în cadrul căreia „sin“ este numai o parte, deși este tocmai partea care denotă particularitatea deosebită a legii în cauză. Oare nu tocmai aici avem ceea ce căutam — funcția? Așadar, strict vorbind, „f“ va indica, de asemenea, o funcție. Aici, ajungem la ceea ce deosebește funcțiile de numere¹⁵. „Sin“ cere o întregire cu semnul unui număr, dar acest din urmă semn nu constituie o parte a desemnării funcției. Aceasta este valabil în general: semnul unei funcții este nesaturat, el cere să fie întregit prin semnul unui număr, pe care îl numim deci semnul argumentului. Același lucru îl constatăm și în cazul semnului radical, în cazul semnului logaritm. Semnele de funcție, spre deosebire de semnele numerelor, nu pot să figureze în mod izolat într-o parte a unei egalități, ci numai atunci cînd sînt întregite printr-un semn care desemnează sau indică un număr. Dar ce semnifică oare o asemenea combinație formată din semnul unei funcții și semnul unui număr, de ex. „sin 1“, „ $\sqrt{1}$ “, „log 1“? De fiecare dată, un număr. Obținem astfel semne ale numerelor compuse din două părți neasemănătoare, partea nesaturată fiind întregită prin cealaltă parte.

Accastă nevoie de întregire poate fi pusă în evidență prin folosirea parantezelor; fie, de exemplu, „sin ()“ sau „()² + 3 · ()“. Deși este notația cea mai adecvată, cea care permite cel mai bine evitarea confuziei care provine din considerarea semnului argumentului drept o parte a semnului funcției, probabil că notația de mai sus nu

va fi acceptată*. În același scop se poate folosi și o literă. Dacă alegem „ξ”, atunci „sin ξ” și „ξ² + 3 · ξ” sînt semne de funcții. Dar în acest caz trebuie stipulat că singurul oficiu pe care îl îndeplinește aici „ξ” este acela de a arăta locurile unde trebuie inserate semnele întregitoare¹⁶. Va fi indicat să nu folosim această literă într-un alt scop, de pildă să n-o folosim în locul lui „x” din exemplele noastre, unde ea servește la exprimarea generalității.

Un defect al notației curente pentru cîtimile diferențiale îl constituie faptul că, în cadrul ei, litera „x” servește atît pentru a arăta locurile argumentului cît și pentru a exprima generalitatea, ca în ecuația

$$„ \frac{d \cos \frac{x}{2}}{dx} = - \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} ”$$

Din acest motiv se naște o dificultate. Conform principiilor generale de folosire a literelor în aritmetică, ar trebui să obținem un caz particular atunci cînd în „x” substituim semnul unui număr. Dar expresia

$$„ \frac{d \cos \frac{2}{2}}{d2} ”$$

este ininteligibilă, întrucît nu ne permite să identificăm funcția. Nu știm dacă funcția în cauză este

$$\cos \frac{()}{2}, \text{ sau este } \cos \frac{2}{()} \text{ sau este } \cos \frac{()}{()}.$$

De aceea, sîntem siliți să folosim notația greoaie

$$„ \left(\frac{d \cos \frac{x}{2}}{dx} \right)_{x=2} ”$$

* În orice caz notația este destinată numai pentru cazul excepțional, cînd dorim să desemnăm o funcție luată izolat. În „sin 2”, „sin” izolat desemnează deja funcția.

Însă cel mai mare inconvenient este, de bună seamă, acela, că devine astfel mult mai greu să întrezărim natura funcției.

Trăsătura caracteristică a semnelor de funcții pe care am numit-o aici nesaturare își găsește, desigur, un corespondent în cazul funcțiilor înseși. Acestea din urmă pot fi numite de asemenea nesaturate și în acest mod noi marcăm deosebirea fundamentală dintre ele și numere. Natural, aceasta nu este o definiție; dar o definiție nu este posibilă nici în cazul de față*. Mă văd nevoit a mă limita la indicarea ideii mele cu ajutorul unei expresii metaforice și mă bizui pe consimțământul cititorului de a-mi ieși în întâmpinare, la jumătatea drumului¹⁷.

Dacă o funcție este întregită printr-un număr astfel încît să dea un număr, acesta din urmă se va numi valoarea funcției pentru primul număr ca argument. Oamenii s-au obișnuit să citească egalitatea „ $y=f(x)$ ” ca „ y este o funcție de x ”. Aici avem două greșeli: în primul rînd, semnul egalității este înțeles ca o copulă; în al doilea rînd se confundă funcția cu valoarea ei pentru un argument. Aceste greșeli conduc la părerea că funcția ar fi un număr, chiar dacă numai un număr variabil sau nedeterminat. Noi am văzut însă că asemenea numere nu există în genere și că funcțiile se deosebesc în mod fundamental de numere¹⁸.

Tendința spre concizie este responsabilă pentru introducerea mai multor expresii inexacte în limbajul matematic iar acestea au sfîrșit prin a face obscur gîndul și prin a produce definiții eronate. Matematica este menită să constituie un model de claritate logică. În fapt însă, în scrierile nici unei științe nu se pot întîlni, probabil, atît de multe expresii eronate și, ca o consecință, atît de multe gînduri eronate, ca în scrierile de matema-

* Definiția dată de H. HANKEl în *Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen* (Universitätsprogramm, Tübingen, 1870), § 1, nu este de nici un folos, din cauza unui cerc vicios; ea conține expresia „ $f(x)$ ”, iar aceasta face ca definiția lui să presupună lucrul care urmează a fi definit.

tică. Corectitudinea logică nu trebuie sacrificată niciodată în favoarea conciziei expresiei. De aceea este extrem de important să se creeze un limbaj matematic în măsură să îmbine rigoarea maximă cu cea mai mare concizie posibilă. În acest scop, notația cea mai indicată va fi, de bună seamă, o notație conceptuală, un ansamblu de reguli conform cărora să putem exprima direct gândurile în simboluri scrise sau tipărite fără mijlocirea limbajului sonor.

¹ În original, articolul poartă titlul „Was ist eine Funktion?” și a apărut în volumul omagial *Festschrift Ludwig Boltzmann gewidmet zum sechzigsten Geburtstage, 20. Februar 1904*, Ambrosius Barth, Leipzig, 1904, pp. 656—666.

² Frege nu ignoră originea istorică a analizei, dar consideră că fundarea logică a disciplinelor matematice trebuie să facă abstracție de geneza și aplicabilitatea acestora. Poziția sa în această privință este exprimată deslușit într-o recenzie pe care o publică în 1885 (*Rezension von: H. Cohen, Das Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte*, Berlin, 1883, în: „Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik“, 87, 1885, pp. 324—329). Frege aduce cărții discutate obiecția că în ea „nu se face în mod suficient distincția între elementul aritmetic și aplicările acestuia în geometrie și mecanică. În esență, calculul infinitesimal este pur aritmetic iar definiția sau justificarea conceptelor sale fundamentale nu trebuie să recurgă la geometrie sau mecanică chiar dacă punctul de pornire istoric se află în probleme de ordin geometric și mecanic” (*apud Frege, Kleine Schriften*, 1969, p. 101).

³ Considerațiile de aici anticipează studiul designatorilor non-rigizi, expresii care capătă referințe diferite în variate contexte de referință. Analiza unor asemenea expresii a căpătat o amploare deosebită în ultimul deceniu, semantica lumilor posibile găsindu-și acolo un domeniu privilegiat de aplicare.

⁴ Spre deosebire de obiectele fizice, obiectele ideale de felul numerelor nu admit variație. La fel, spune în altă parte Frege, conceptele în genere nu admit variație și nu au un istoric propriu-zis; putem vorbi doar despre un istoric al tentativei de aprehendare a conceptului (a se vedea articolul lui Frege, „Über das Trägheitsgesetz“, publicat în 1891 și retipărit în *Kleine Schriften*, pp. 113—124; îndeosebi cf. p. 122).

⁵ E. Czuber, matematician german, ale cărui cursuri de analiză au circulat la începutul secolului nostru.

⁶ Așadar, litera n funcționează în cazul de față în calitate de variabilă legată. Așa cum Frege subliniază în repetate rânduri, principala utilizare a literelor latine în matematică este utilizarea lor nu în calitate de nume proprii, ci pentru a conferi propoziției generalitatea conținutului. În acest caz, litera indică în mod nedeterminat.

⁷ Strict vorbind, expresia „dacă numărul n este par, atunci $\cos n\pi = 1$ ” nu are sens decât cu condiția subînțeleasă că este prescurtarea enunțului: „pentru orice n , dacă numărul n este par, etc.”. În terminologia ulterioară a lui Frege, expresia citată este „uneigentliche Satz”, o propoziție improprie, o expresie avînd forma unei propoziții dar care nu comunică un gînd; această expresie este însă partea unui complex propozițional (Satzgefüge) care exprimă un gînd; totodată, expresia — care este, cum spunem azi, o „formă propozițională” — poate căpăta un sens și pe calea indicată de Frege, adică înlocuind n prin numele unui număr. Potrivit terminologiei astăzi în uz, în „dacă numărul n este par atunci... etc.”, litera n este utilizată în calitate de variabilă liberă, admite substituirea unei constante individuale în cuprinsul expresiei; dimpotrivă, în „pentru orice n , dacă numărul n este par, atunci...etc.” litera n funcționează ca variabilă legată, servind la indicarea generalității.

⁸ Cum scrie Alonzo Church: „...concepem variabila ca fiind asociată cu un anumit domeniu nevid de valori posibile, pe care-l vom denumi *domeniul* variabilei. De aceea, în conținutul variabilei sînt cuprinse tipurile de conținuturi care aparțin unui nume propriu din domeniu. Dar o variabilă nu trebuie identificată cu un nume propriu al domeniului ei, deoarece există și deosebiri de conținut între aceste două”. Church adaugă: „Se poate vedea ușor, din punctul de vedere al uzului matematic obișnuit al variabilelor, că o astfel de identificare este imposibilă. Căci două nume proprii dintr-un domeniu sînt reciproc substituibile, dacă au doar același sens; însă două variabile distincte trebuie să rămîină distincte, chiar dacă au același domeniu, determinat de același concept” (din *Introducere în logica matematică*, în culegerea *Logică și filozofie*, Ed. Politică, 1966, p. 156).

⁹ Explicația veche pe care Frege o combate ca intenabilă mai are curs și astăzi, ea migrând dintr-un manual în altul, dintr-un dicționar în altul. Cităm cu titlu de exemplu: „VARIABIL(ă)... (Mat.). *Cantități* (sau *mărimi*) *variabile* = cantități (sau mărimi) susceptibile de a-și schimba valoarea față de altele, care rămân constante. (Mat.; substantivat, f.) Cantitate care ia succesiv diferite valori (în cursul unui calcul)” (*Dicționarul Explicativ al Limbii Române*, 1975).

¹⁰ Definiția provine în esență de la Dirichlet. A se vedea Evoluția conceptului de funcție după H. Hankel, în O. Becker, *Fundamentele matematicii*, pp. 251—252.

¹¹ Pentru Frege, sublinierea elementului de generalitate pe care îl comportă legea de punere în corespondență are o însemnătate cu atât mai mare cu cât el concepe funcția (de un argument) ca peste tot definită pe domeniul ei (domeniul tuturor obiectelor, în cazul funcțiilor de prima treaptă, domeniu așadar infinit).

Pe de altă parte, dacă ne amintim că și conceptele sînt funcții, invocarea generalității în locul variabilității capătă o motivare în plus.

¹² Aceasta devine evident dacă luăm în considerație conceptele: deosebiriile dintre concepte nu sînt de ordin cantitativ, ci, ca să spunem așa, calitativ. Totodată, oricărei funcții i se poate asocia o *relație*, adică de asemenea o entitate care acceptă o caracterizare calitativă. Deosebirea dintre diferitele relații între cantități, între relații cantitative, așadar, este ea însăși calitativă.

¹³ A se vedea „Funcție și concept”.

¹⁴ A se vedea și nota 8, la „Funcție și concept”.

¹⁵ În continuare, Frege reia explicațiile furnizate în „Despre funcție și obiect”.

¹⁶ Literele mici grecești nu sînt utilizate de Frege nici ca variabile libere, nici ca variabile legate, ci într-o a treia utilizare specifică, pe care simbolismul curent al logicii predicatelor n-a mai păstrat-o sistematic. Ea revine însă frecvent în notațiile metalogice pentru predicate, funcții și formule în genere, atunci cînd se dorește indicarea locurilor goale prin umplerea cărora apar diferite expresii.

¹⁷ Idee care revine stăruitor în scrierile lui Frege. Cititorul acestui volum a putut s-o întâlnească deja în „Concept și obiect”. În una din scrierile postume, Frege formulează pregnant același gând: „*Este imposibil să redăm printr-o definiție ce este o funcție, întrucât aici este vorba despre ceva simplu și indecompozabil. Nu este posibil altceva decât să conducem la ceea ce avem în vedere, făcând aceasta mai clar prin intermediul unei corelări cu ceea ce este deja cunoscut. În locul unei definiții trebuie să intre în joc o explicație care, de bună seamă, trebuie să se bazeze pe o înțelegere venită în întâmpinare*” (*Nachgelassene Schriften*, Bd. I, 1969, p. 254).

¹⁸ Persistența „definiției” tradiționale a funcției este exemplificată și de *Dicționarul Explicativ al Limbii Române*: „*Funcție* ... 6. (*Mat.*). Mărime variabilă care depinde de una sau de mai multe mărimi variabile independente”.

TABEL CRONOLOGIC

- 1848 La 8 noiembrie 1848 se naște la Wismar, Friedrich Ludwig Gottlob Frege, fiul lui Karl Alexander Frege (1809—1866), director de școală, și al Augustei Frege, născută Bialloblotzky, profesoară.
- Un val de revoluții zguduie Europa. Marx și Engels publică *Manifestul Partidului Comunist*. Moare Bernard Bolzano supranumit „Leibniz al Boemiei”, logicianul cel mai important din prima jumătate a secolului trecut, precursor al semanticii logice.
- 1854 George Boole (1815—1864), după ce publicase în 1847 *The Mathematical Analysis of Logic* dă acum la iveală *An Investigation into the Laws of Thought, on which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*.
- 1859 Augustus de Morgan redactează memoriul „On the Syllogism IV and on the Logic of Relations” (publicat în 1864), dezvoltând o logică a relațiilor. Darwin publică *Originea speciilor*, iar Marx *Contribuții la critica economiei politice*. Se nasc E. Husserl și H. Bergson.
- 1864—1869 Tânărul Frege urmează cursurile gimnaziului din Wismar, pe care îl absolvă în 1869; se înscrie la Universitatea din Jena.
- În 1864, Jevons introduce disjuncția neexclusivă în algebra booleană. În 1867 K. Marx publică primul volum din *Capitalul*.
- În același an G. F. B. Riemann expune bazele geometriei sale neeuclidiene în *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*; în 1869, Jevons construiește o mașină logică pentru efectuarea mecanică a inferențelor studiate de Boole.
- 1869—1870 Frege studiază, la Universitatea din Jena, chimia, filosofia, matematica.

În America, Ch. S. Peirce inițiază primele sale investigații asupra logicii relațiilor.

1871—1873 La Universitatea din Göttingen, Frege studiază filosofia religiei (cu Hermann Lotze), fizica și îndeosebi matematica.

În 1872 J. W. R. Dedekind (1831—1916) publică *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, o teorie a numerelor reale care resuscită teoria rapoartelor a lui Eudoxus în versiunea „tăieturii Dedekind“. Se naște Bertrand Russell.

1873 Frege absolvă Universitatea din Göttingen și susține teza *Über eine geometrische Darstellung der imaginären Gebilde in der Ebene*, obținând la 12 noiembrie titlul de doctor în filosofie. Pregătește lucrarea sa de abilitare.

1874 Prezintă ca *Habilitationsschrift* lucrarea *Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Grössenbegriffes gründen*. În luna mai este admis ca *Privatdozent* (lector) la Facultatea de Matematică a Universității din Jena; întreaga sa carieră universitară, timp de 44 ani, va fi legată de acest loc.

1874—1878 Frege recenzează trei cărți de matematică și publică un articol; pregătește *Begriffsschrift*. Se conturează tot mai clar proiectul unei fundamentări riguroase a aritmeticii pe baza logicii.

În 1877 Ernst Schröder publică *Der Operationskreis des Logikkalküls* iar Mc. Call, *The Calculus of Equivalent Statements*, o versiune a logicii propozițiilor.

1879 Apare la Halle *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, o piatră de hotar în istoria logicii. Frege însuflă logicii noi conținuturi, metode și obiective; fundează axiomatic logica propozițiilor, construiește logica predicatelor, indică mijloacele de formalizare a propozițiilor matematice, construiește primul sistem formal, definește concepte aritmetice prin idei logice, formu-

lează programul logicist. În același an, Frege promovează în ierarhia universitară la poziția de *ausserordentlicher Professor*.

1879—1883 Revoluționarea logicii de către Frege trece aproape neobservată; *Begriffsschrift* este primită rece, ignorată sau criticată. Dezamăgit, Frege scrie câteva articole în apărarea „Scrierii conceptuale”. Apar astfel „Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift” în 1882 și „Über den Zweck der Begriffsschrift” în 1883. Un articol de amploare — „Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift” —, precum și „Booles logische Formelsprache und meine Begriffsschrift” îi sînt refuzate de câteva reviste filosofice și matematice; manuscrisele vor fi editate abia în 1967.

În aceeași perioadă, Frege pregătește a doua sa carte, *Die Grundlagen der Arithmetik*.

În 1880, în timp ce mai apar multe *Logici* tributare paradigmei tradiționale, Ch. S. Peirce elaborează memoriile *On the Algebra of Logic: A Contribution to the Philosophy of Notation* și *On a Boolean Algebra with one Constant*. În 1881 apare *Symbolic Logic* a lui J. Venn. În 1883 H. O. Mitchell și apoi Ch. S. Peirce utilizează deja „cuantorii” (termenul îi aparține lui Peirce și va fi încetățenit în logică, dar Frege introdusese procedeul cuantificării încă în 1879, în *Begriffsschrift*). În 1883 Georg Cantor (1845—1918) publică *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre*; cartea înmănunchiază mai multe articole precedente. Teoria mulțimilor și a numerelor transfinite creată de Cantor va fi salutată de Frege în anul următor ca un pas înainte în știință.

1884 Frege publică *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine Logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. A doua carte a lui Frege marchează o dată în filosofia logicii și a matematicii. Definiția logicistă

a numărului va face carieră; preluată de la Cantor, Frege sau Russell, sau găsită independent, ea va apare în repetate rînduri în operele altor matematicieni. — La apariție, cartea lui Frege stîrnește prea puține ecouri.

- 1885 Frege comunică și publică *Über formale Theorien der Arithmetik*.
- 1886—1890 Frege lucrează intens la a treia sa carte, dezvoltînd și modificînd ideile sale logico-filosofice.
- În 1887 *Was sind und was sollen die Zahlen?* de R. Dedekind abordează în spirit logicist teoria mulțimilor și fundarea aritmeticii și analizei. *Arithmetices Principia, Nova Methodo Exposita* (1889) de Peano enunță axiomele aritmeticii (anticipate de Dedekind în anul precedent, traducerea lor în limbaj logic se poate găsi încă în 1884 la Frege). În 1890 apare primul volum din *Vorlesungen über die Algebra der Logik* ale lui E. Schröder, monumentală monografie care sintetizează algebra logicii; celelalte volume vor apare pînă în 1905.
- 1891 Începutul unui deceniu fecund în care văd lumina tiparului scrieri fregeene importante; apar articolele „Über das Trägheitsgesetz” și „Funktion und Begriff”. E. Husserl publică prima sa carte *Philosophie der Arithmetik* unde discută și concepția lui Frege.
- 1892 Apare „Über Sinn und Bedeutung”, contribuție epocală la elaborarea semanticii logice. Un alt articol care vede lumina tiparului în același an este „Über Begriff und Gegenstand”; totodată Frege recenzează *Zur Lehre vom Transfiniten* de Georg Cantor.
- 1893 La Jena apare primul volum din *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*. În a treia carte, Frege își propune să dezvolte pas cu pas, cu maximă rigoare, programul logicist, să definească așa-dar ideile aritmeticii și să deducă legile ei în cadrul sistemului formal al logicii. La apariție, cartea nu

stîrnește ecouri largi și vor trebui să treacă șapte decenii pînă la reeditarea ei integrală.

- 1894 Frege recenzează *Philosophie der Arithmetik* a lui E. Husserl, în care ideile fregeene din *Fundamentele aritmeticii* (1884) erau puse în discuție; recenzia marchează începutul influenței fecunde a lui Frege asupra lui Husserl.

În *Notations de logique mathématique* (urmate între 1895—1908 de cinci versiuni ale unui *Formulaire de mathématiques*), Giuseppe Peano combină logica matematică și demersul axiomatic în tentativa fundării matematicii.

- 1895 Frege publică articolul „Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröders *Vorlesungen über die Algebra der Logik*“ și „Le nombre entier“.

Cantor descoperă o antinomie în teoria mulțimilor; doi ani mai târziu, Burali-Forti o va descoperi în mod independent și o va publica.

- 1896 Frege confruntă ideografia lui Peano cu propria lui „scriere conceptuală“ și semnalează lacune logice ale ideografiei în „Über die Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene“. O scrisoare către G. Peano datată „Jena, 29 septembrie 1896“ apare în „Rivista di Matematica“ abia în 1899. — Este promovat în ierarhia universitară la rangul de Profesor onorific.

- 1897—1901 Ani de tăcere publicistică, întreruptă numai în 1899, cînd Frege publică o broșură polemică acerbă *Über die Zahlen des Herrn H. Schubert*; totodată, ani de lucru intens, așa cum atestă manuscrisele.

A. N. Whitehead publică în 1898 *Universal Algebra*.

În 1899 Cantor descoperă paradoxul care îi poartă numele; David Hilbert publică *Die Grundlagen der Geometrie*, prima axiomatizare pe deplin riguroasă a geometriei euclidiene, în spiritul axiomaticii formale. Bertrand Russell publică *A Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz* (1900), iar Couturat, *La logique de Leibniz d'après des documents inédits*

(1901). În 1900—1901 apar *Logische Untersuchungen* în două volume de E. Husserl.

1902 An de răscruce pentru Frege; Bertrand Russell îi scrie, comunicînd descoperirea unui paradox în sistemul din *Grundgesetze*; Frege îi răspunde la 22 iunie. În octombrie al aceluiași an Frege scrie un *Appendix* pentru volumul II al cărții sale în care prezintă paradoxul lui Russell și recunoaște că sistemul logic al aritmeticii a fost zdruncinat din temelii, constatînd totodată caracterul general al crizei din fundamente.

1903 Apare la Jena volumul II din *Grundgesetze der Arithmetik, Begriffsschriftlich abgeleitet*. În același an, publică primele două articole din ciclul *Über die Grundlagen der Geometrie*, discuție asupra axiomaticii formale hilbertiene.

Russell publică *The Principles of Mathematics*, carte în care prezintă pe larg concepțiile logico-aritmetice ale lui Frege, problema paradoxelor, soluția lui Frege etc.

1904—1917 În ultimii ani ai carierii sale universitare. Frege publică tot mai puțin și discontinue: „Was ist eine Funktion?“ (1904), trei articole din ciclul *Über die Grundlagen der Geometrie* (1906); polemizează cu formalistul J. Thomae (1906—1908); în „The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics“ apar în 1912 observațiile sale la articolul lui P. Jourdain, „The Development of the Theories of Mathematical Logic and the Principles of Mathematics“; între 1915—1917, revista „The Monist“ publică în traducere Prefața, Introducerea și primele șapte secțiuni din *Grundgesetze der Arithmetik*, vol. I.

Viața personală a lui Frege este marcată de drame. Copiii săi muriseră mai demult la o vîrstă fragedă și soții Frege adoptaseră în 1902 un copil, Alfred, pe care Frege îl va crește singur, întrucît soția sa moare în 1905.

În 1907 primește titlul onorific de *Hofrat*. Predă cursuri de matematici și fundamente expunând bazele logicii, propriul său sistem formal. Corespundează cu Russell, Hilbert, Husserl, Couturat și cu alte personalități proeminente. Îl vizitează Wittgenstein; cursurile sale sînt audiate de către Rudolf Carnap.

În luptă cu decepția și oboseala care se instalează, Frege nu încetează să mediteze asupra bazelor aritmeticii și filosofiei logicii. Manuscrisele editate postum arată că Frege lucra la o expunere sistematică a logicii sale. În primăvara anului 1914 redactează amplul fragment *Logik in der Mathematik*.

În acești ani, criza fundamentelor matematicii devine tot mai vizibilă. Russell, Zermelo, Hilbert și Brouwer se angajează pe căi diferite în căutarea unei soluții. La al III-lea Congres Internațional de Matematică de la Heidelberg, în 1904, Hilbert conferențiază „Despre fundamentele logicii și aritmeticii”, preconizînd fundarea riguroasă a conceptului de număr prin axiomatizare și demonstrații de consistență. În 1905 Jules Richard descoperă un nou paradox; Poincaré — în polemică cu Russell — exultă: logica nu este numai eronată, ea generează paradoxuri! În 1906, Russell sugerează teoria „fără clase” — încercare de soluționare a paradoxelor, iar în 1908 formulează prima versiune a teoriei tipurilor în articolul „Mathematical Logic as Based on the Theory of Types”. Tot în 1908 L. E. Brouwer publică un articol asupra incertitudinii principiilor logicii, preconizînd ca terțiul exclus să nu fie acceptat ca temei al raționamentului matematic iar E. Zermelo dă prima axiomatizare a teoriei mulțimilor. În 1910, A. N. Whitehead și B. Russell publică primul volum al monumentalei lor opere în trei volume (apărută pînă în 1913) *Principia Mathematica*, în care logica fregeană, combinată cu teoria tipurilor este pusă la baza întregii matematici; *Principia Mathematica* impune paradigma logicii simbolice. În 1914 moare Ch. S. Peirce.

L. Löwenheim publică primele cercetări metalogice asupra logicii predicatelor (1915). Hilbert și un grup de matematicieni lucrează în vederea elaborării *meta-matematicii* (teoria demonstrațiilor).

1918 Frege se pensionează și se retrage la Bad Kleinen, unde va petrece ultimii ani de viață. Publică articolele „Der Gedanke: Eine Logische Untersuchung” și „Die Verneinung: Eine Logische Untersuchung”. Moare Georg Cantor.

1919—1925 În amurgul vieții sale Frege nu mai publică decât a treia parte din ciclul *Logische Untersuchungen*, și anume *Gedankengefüge*. În 1924—1925 abandonează concepția logicistă, constatînd eșecul ei total și schițează proiectul unei fundări geometrice a conceptului de număr (fragmentele postume *Erkenntnisquellen der Mathematik und der mathematischen Naturwissenschaften; Zahlen und Arithmetik; Neuer Versuch der Grundlegung der Arithmetik*).

Cercetări metalogice asupra calculului propozițiilor și predicatelor sînt întreprinse de către Post, Skolem, Bernays ș.a. Se cristalizează noțiunile metalogice de consistență și completitudine, tehnicile de demonstrare a independenței axiomelor, a consistenței etc. E. Post și J. Łukasiewicz ajung pe căi diferite la logicile polivalente. Th. Skolem descoperă limite ale mijloacelor de expresie ale logicii predicatelor. L. Wittgenstein publică *Tractatus logico-philosophicus* (1921). Începuturile Cercului de la Viena.

26 iulie 1925. Frege încetează din viață la Bad Kleinen. Moartea lui Frege trece aproape neobservată.

1926—1976 Renaștere — mai întâi lentă, apoi tot mai rapidă — a interesului pentru opera lui Frege pe fundalul interesului tot mai mare suscitată de dezvoltarea vertiginosă a cercetărilor logice și metamatematice. Manuscrisele, întregul fond științific, fregean sînt pre-

luate de Universitatea din Münster, unde Heinrich Scholz este profesor.

În 1934 se reeditează *Fundamentele aritmeticii*. Cartea e tradusă în italiană în 1948 și în engleză în 1950 (ediția bilingvă a lui J. Austin).

În 1935, la Congresul internațional de filosofie științifică de la Paris, H. Scholz și F. Bachmann prezintă comunicarea „Der wissenschaftliche Nachlass von G. Frege”. Din păcate, o parte din manuscrisele fondului fregean pier în timpul războiului, într-un incendiu cauzat de un bombardament. Postumele vor fi editate mult mai târziu pe baza unor copii dactilografiate.

În 1952 P. Geach și M. Black traduc și editează *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*. Începînd din deceniul trecut reeditările și traducerile se succed într-un ritm tot mai susținut; *Begriffsschrift* apare din nou, fiind tradus totodată în engleză în două versiuni diferite; se reeditează toate celelalte scrieri antume ale lui Frege. În fine, în 1969 și 1976 apar cele două volume ale ediției *Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel*; reeditarea integrală a operei lui Frege poate fi considerată împlinită. Alături de articole care discută și popularizează elementele disparate ale concepției fregeene, sînt elaborate primele sinteze mature, monografiile de anvergură. Frege este integrat definitiv în circuitul marilor valori ale logicii și filosofiei.

TABLA DE MATERII

STUDIU INTRODUCATIV <i>de Sorin Vieru</i>	V
Notă asupra ediției	I.V
FUNDAMENTELE ARITMETICII. O corectare logico-matematică asupra conceptului de număr	3
Notiță introductivă	5
Text	19
Note	156
FUNCȚIE ȘI CONCEPT	235
Notiță introductivă	237
Text	245
Note	271
DESPRE CONCEPT ȘI OBIECT	281
Notiță introductivă	283
Text	289
Note	306
CE ESTE O FUNCȚIE?	313
Notiță introductivă	315
Text	318
Note	330
Tabel cronologic	335